



TESIS DE MAESTRÍA

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS Y CONTROL
ADAPTATIVO APLICADOS A UN HELICÓPTERO
DE LABORATORIO CON DOBLE ROTOR

AUTOR:

RIGOBERTO JUÁREZ SALAZAR

ASESORES:

DR. W. FERMÍN GUERRERO SÁNCHEZ
DR. JOSÉ JACOBO OLIVEROS OLIVEROS

POSGRADO EN FÍSICA APLICADA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

19 DE JULIO DE 2011

Agradecimientos

Gracias a mis padres y hermanos por haberme dado la oportunidad de perseguir un sueño y ayudarme a alcanzarlo. Gracias a mi esposa por acompañarme en este camino de sacrificios y gloria, y a mi hijo por las lecciones de fortaleza.

Agradezco de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que permitió realizar mis estudios de maestría, a Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) por el apoyo para la culminación de este trabajo, al Laboratorio de Investigación de Sistemas Dinámicos Controlables y al Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática por la disposición de equipo y espacio para el desarrollo teórico y experimental del trabajo.

Gracias a los profesores W. Fermín Guerrero S., J. Jacobo Oliveros O., Carlos I. Robledo S., J. Fermi Guerrero Castellanos, G. Tavares Velasco, Humberto Salazar I., Oscar M. Martínez B., A. Vergara Betancourt, Uri Noe Mora Rivera, por el invaluable apoyo que me ofrecieron durante estos últimos años formándome para hacer de mí una mejor persona.

Rigoberto Juárez Salazar

Resumen

En este trabajo teórico experimental, se presenta un controlador adaptativo por modelo de referencia para un helicóptero bi-rotor de laboratorio; ésta meta se alcanza iniciando con un estudio del movimiento del helicóptero para, a partir de las leyes de Newton, obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para modelarlo. Posteriormente se estudia el método de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial y los algoritmos recursivos para estimar parámetros en tiempo real y ajustar el modelo propuesto a los datos experimentales; en este tema se proponen criterios para la determinación del factor de olvido y un algoritmo para el monitoreo del número de condición. Finalmente, se estudian cuatro tipos de control adaptativo por modelo de referencia (de adaptación de ganancia, adaptación de parámetros ambos con criterio de gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov) y se diseñan tres de ellos para el helicóptero donde se compara el rendimiento de éstos con controladores clásicos por retroalimentación de estados (regulador cuadrático lineal (LQR), LQR y acción integral).

A lo largo del trabajo, los algoritmos son probados por simulación empleando Matlab-Simulink y finalmente los algoritmos son aplicados al helicóptero y un motor de corriente directa como auxiliar para la validación de los algoritmos de control. Adicionalmente se propone un algoritmo para la estimación de velocidad y aceleración angular necesaria para la estimación de los parámetros de los rotores del helicóptero y un algoritmo para la estimación de derivadas de orden superior por ajuste polinomial y traslación de datos.

Índice general

Índice general	VII
Índice de figuras	XI
Introducción	XIII
1. Modelo matemático del motor DC y del TRMS	1
1.1. Motor DC	1
1.2. El TRMS	4
1.2.1. Simplificaciones y diferencias del TRMS con un helicóptero real	4
1.2.2. Descripción general	5
1.2.3. Modelo del rotor	6
1.2.4. Modelo de la mecánica del TRMS	10
1.2.5. Modelo del TRMS en el espacio de estados	14
1.2.6. Análisis de controlabilidad y observabilidad	15
1.2.7. Implementación en MATLAB-Simuink	17
2. Estimación de parámetros	21
2.1. El proceso de identificación de sistemas	21
2.1.1. Conocimientos previos sobre la planta	21
2.1.2. Diseño del experimento y captura de datos	22
2.1.3. Elección de la estructura del modelo	23
2.1.4. Elección del criterio de ajuste y ajuste del modelo	23
2.1.5. Validación del modelo	24
2.2. Estimación de parámetros como un problema de optimización	25
2.3. Estimación de parámetros para modelos lineales	25
2.3.1. Criterio de mínimos cuadrados	26
2.3.2. Algoritmo de estimación por mínimos cuadrados para parámetros constantes	26
2.3.3. Algoritmo de estimación por mínimos cuadrados para parámetros variables	32
2.3.4. Estimación de asíntotas de convergencia de los parámetros	35
2.3.5. Criterios para la determinación del factor de olvido exponencial	36
2.3.6. Monitor del número de condición en el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados	40
2.4. Estimación de parámetros para modelos no lineales	42
2.4.1. Linealización local o método de Newton	42
2.4.2. Método de Gauss-Newton	43
2.4.3. Método de Levenber-Marquardt	44
2.5. Validación de algoritmos por aplicación a modelos sintéticos	45
2.6. Validación experimental por aplicación a un motor DC con interfaz	48
2.6.1. Pre-filtrado	51
2.6.2. Derivación numérica	51

2.6.3.	Estimación de parámetros	51
2.6.4.	Implementación	52
2.6.5.	Resultados experimentales	52
2.6.6.	Estimación de parámetros considerando un modelo simplificado de la interfaz de entrada y salida	53
2.7.	Estimación de parámetros del TRMS	54
2.7.1.	Los rotores con modelo de primer orden en ω	54
2.7.2.	Los rotores con modelo de primer orden en θ	57
2.7.3.	El movimiento en el plano vertical	59
2.7.4.	El movimiento en el plano horizontal	61
3.	Control Adaptativo	65
3.1.	Necesidad del control adaptativo	66
3.2.	Diseño de sistemas de control	67
3.2.1.	Paso 1. Modelado	68
3.2.2.	Paso 2. Diseño del controlador	68
3.2.3.	Paso 3. Implementación	69
3.3.	Control adaptativo por modelo de referencia	69
3.4.	MRAS basado en el enfoque del gradiente	70
3.4.1.	Modificaciones a la regla de ajuste	70
3.4.2.	MRAS por adaptación de ganancia	71
3.4.3.	MRAS para un sistema de primer orden	71
3.4.4.	MRAS para un sistema de orden n	72
3.5.	MRAS basado en teoría de estabilidad de Lyapunov	73
3.5.1.	MRAS por adaptación de ganancia	73
3.5.2.	MRAS para un sistema de primer orden	74
3.6.	Control con acción integral	75
4.	Control del TRMS	77
4.1.	Estabilidad asintótica global de los rotores	77
4.2.	Linealización exacta entrada-estado por retroalimentación	78
4.2.1.	Linealización completa de estado	79
4.2.2.	Linealización exacta del subsistema mecánico del TRMS	80
4.3.	Diseño del observador de estados	82
4.4.	Control por retroalimentación de estados	83
4.4.1.	Control del movimiento en el plano vertical	84
4.4.2.	Control del movimiento en el plano horizontal	84
4.5.	Control con acción integral	85
4.6.	Control adaptativo por modelo de referencia	86
4.6.1.	Adaptación de ganancia con enfoque de gradiente negativo del error	87
4.6.2.	Adaptación de una ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov	88
4.7.	Conclusiones	88
5.	Resultados y conclusiones	91
5.1.	Resultados	91
5.1.1.	La estimación de parámetros	91
5.1.2.	El control adaptativo	92
5.2.	Conclusiones	92

A. Estimación de velocidad y aceleración angular del rotor del TRMS	95
A.1. Definición del problema	96
A.2. Estimación por interpolación de datos y derivación numérica	97
A.2.1. Derivada numérica	98
A.2.2. Registro de corrimiento	98
A.2.3. Gestión por eventos y la función histéresis como generador de eventos	99
A.2.4. Envolvimiento de posición	99
A.3. Prueba del algoritmo por simulación	101
A.4. Problemas que pueden presentarse	102
A.5. Aplicación a un sistema real	103
A.6. Conclusiones	105
B. Estimación de derivadas por ajuste polinomial y traslación de datos	107
B.1. Explosión en el error de predicción y en los parámetros	107
B.2. Ajuste de un polinomio de grado tres por traslación de datos	109
B.3. Programa en Matlab Simulink	111
B.4. Validación del algoritmo por prueba en un modelo sintético	112
C. Control adaptativo de velocidad para el motor DC	117
C.1. Diseño considerando un modelo de primer orden	117
C.1.1. Adaptación de ganancia	117
C.1.2. Adaptación de parámetros	119
C.2. Diseño considerando un modelo de segundo orden	119
C.2.1. Adaptación de ganancia	119
C.2.2. Adaptación de parámetros (estados ω, i)	121
C.2.3. Adaptación de parámetros (estados $\omega, \dot{\omega}$)	122
C.3. Implementación en una planta real y resultados experimentales	123
C.4. Conclusiones	124
D. Preliminares matemáticos y definiciones básicas	125
D.1. Elementos matemáticos	125
D.2. Análisis	128
D.2.1. Función continua	128
D.2.2. Funciones diferenciables	129
D.2.3. Mapeo contractivo	131
D.2.4. Existencia y unicidad	131
D.2.5. Dependencia continua respecto a condiciones iniciales y parámetros	132
D.3. Estabilidad de Lyapunov y convergencia	133
D.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	134
D.3.2. Funciones de comparación	134
D.3.3. Definiciones básicas empleando funciones de comparación	134
D.4. Análisis de estabilidad de sistemas lineales	135
D.4.1. Criterio de Hurwitz	135
D.4.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov	136
D.5. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales	137
D.5.1. Primer método de Lyapunov	137
D.5.2. Segundo método de Lyapunov	138
D.5.3. Consideraciones prácticas	140
D.6. Método de Lyapunov para el diseño de controladores adaptativos	141
D.7. Misceláneos	142
D.7.1. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales	143
D.7.2. Control cuadrático lineal (LQR)	144

D.7.3. El observador de estados	144
---	-----

Bibliografía	147
---------------------	------------

Índice de figuras

1.1. Motor DC de laboratorio empleado en este trabajo.	2
1.2. Diferencias entre el TRMS y un helicóptero real.	5
1.3. Movimiento del TRMS en el plano vertical y horizontal.	6
1.4. Descripción física del TRMS así como los límites en el movimiento angular.	7
1.5. Diagrama de bloques del modelo simplificado de un motor DC con excitación separada.	7
1.6. Movimiento angular del TRMS y los torques en el plano vertical.	10
1.7. Instrucciones en Wolfram Mathematica para el cálculo del rango de las matrices P y Q	18
1.8. Diagrama de bloques del modelo del TRMS en Matlab-Simulink.	19
2.1. El proceso de identificación de sistemas.	22
2.2. Curva característica del factor de olvido exponencial $q(k)$, aproximación de primer orden $\rho_1(k)$, $\rho_2(k)$ y aproximación de tercer orden $\rho_3(k)$	37
2.3. Izq.) Curva ajustada y_A del modelo (2.77) a los datos experimentales y_E aplicando el método de Gauss-Newton. Centro) Error $e = y_E - y_A$. Der.) Norma ℓ_2 del error $\ e\ ^2 = e^T e$	45
2.4. Programa script en Matlab para la estimación de parámetros del ejemplo 1 aplicando el método de Gauss-Newton.	46
2.5. Ejemplos de estimación de parámetros por mínimos cuadrados con factor de olvido.	47
2.6. Estimación de asíntotas de convergencia.	48
2.7. Implementación en MATLAB-Simulink de los algoritmos 2, 3 y (2.63) aplicados a los ejemplos 2 y 3.	49
2.8. Configuración típica de los sistemas de control con interfaces de entrada y salida.	50
2.9. Estructura del estimador de parámetros con retardo.	52
2.10. Estimación de parámetros para el motor DC con interfaces de entrada y salida.	53
2.11. Estimación de parámetros para el motor DC con interfaces simplificadas de entrada y salida.	54
2.12. Evolución de la estimación de los parámetros de los rotores del TRMS. Arriba) Parámetros m_{1m} , m_{2m} , m_{3m} del rotor principal. Abajo) Parámetros m_{1t} , m_{2t} , m_{3t} del rotor de cola.	55
2.13. Validación de los modelos de los rotores del TRMS por comparación directa con los datos experimentales.	56
2.14. Caracterización de la señal tren de pulsos cuadrados.	58
2.15. Implementación de la integral de un tren de pulsos cuadrados en una función Matlab.	58
2.16. Estimación de los parámetros η_i del TRMS correspondientes al movimiento en el plano vertical	60
2.17. Estimación de parámetros ρ_i del TRMS correspondientes al movimiento en el plano horizontal.	62
3.1. Configuración típica de un control adaptativo.	65
3.2. Pasos en el diseño de sistemas de control.	67
3.3. Diagrama de bloques típico del controlador adaptativo con modelo de referencia.	69
3.4. Diagrama de bloques del control por retroalimentación de estados con acción integral.	76
4.1. Resultados obtenidos por simulación de la aplicación de control LQR y LQR con acción integral para el modelo linealizado exactamente (4.22).	85

4.2. Resultados obtenidos por simulación de la implementación de control adaptativo de una y dos ganancias con enfoque de gradiente negativo del error (4.22).	88
4.3. Resultados obtenidos por simulación de la implementación de control adaptativo de una ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov (4.31).	89
A.1. Observadores de estado para recuperar componentes o todo el vector de estados.	95
A.2. Posición angular real $x(t)$ y cuantizada $\tilde{x}(t)$ a lo largo de una trayectoria monóticamente creciente.	96
A.3. Histéresis ideal empleado como generador de eventos.	99
A.4. Envolvimiento de a) $x(t) = 1.5 \sin t$ para obtener b) ζ acotada en los límites inferior y superior $[\zeta_l = 0, \zeta_u = 1]$	100
A.5. Implementación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular con gestión por eventos.	100
A.6. Arriba) Curva de posición $\tilde{x}$ obtenida desde el sensor. Medio) Envolvimiento de $\tilde{x}$. Abajo) Pulsos generados por la función de histéresis donde $e^- = 0$ y $e^+ = 1$	101
A.7. Arriba) Curva de posición $\tilde{x}$. Medio) Velocidad angular real y estimada. Abajo) Aceleración angular real y estimada.	102
A.8. Izq.) Función de histéresis con umbral $H_u < H_u^+$. Der.) Función de histéresis en el dominio del tiempo.	103
A.9. Validación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular por comparación directa de posición angular.	104
A.10. Error entre la posición angular medida y estimada.	104
B.1. Tendencia a explosión del error de predicción considerando las abscisas $t = [0, \{\pi/4, \pi/2, \pi, 2\pi, 10\pi\}]$ y las ordenadas: línea punteada $y = \sin(t)$, línea sólida $\hat{y} = at + b$	108
B.2. Explosión de parámetros.	108
B.3. Traslación de un polinomio de grado tres por modificación de los parámetros.	110
B.4. Programa principal en Matlab Simulink y el código de la función empotrada.	111
B.5. Subsistema [Traslación].	112
B.6. Diagrama de bloques de subsistema [Sensor].	112
B.7. Subsistema [RLS_F con Traslación] y código de las funciones empotradas.	113
B.8. Subsistema [Recuperación] y código de las funciones empotradas.	114
B.9. Explosión de parámetros por ajuste de un polinomio de tercer grado a una curva senoidal.	114
B.10. Comportamiento del ajuste cuando $\delta \rightarrow 0$	115
C.1. Control de velocidad adaptativo para el motor DC. Diseño basado en un modelo de primer orden.	118
C.2. Control de velocidad adaptativo para el motor DC. Diseño basado en un modelo de segundo orden.	120
C.3. Control adaptativo para el motor DC.	122
C.4. Implementación de control de velocidad adaptativo por adaptación de ganancia con enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov.	123
C.5. Implementación de control de velocidad adaptativo por adaptación de parámetros con enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov.	124

Introducción

Ninguna publicación es tan conservadora como un libro de texto; los errores son copiados de generación en generación y parecen ganar apoyo por pura repetición. Nadie va hacia atrás a descubrir la fragilidad de los argumentos originales.

S. J. Gould.

EL control automático se ha estado desarrollando muy rápidamente desde la segunda guerra mundial. Desde entonces la comunidad científica ha aportado grandes avances en electrónica y la computación que han permitido la implementación de teorías de control que en sus orígenes eran imposibles debido a la deficiencia tecnológica de esos tiempos. En sus orígenes, el control automático se desarrolló para resolver problemas industriales y militares; actualmente, muchas otras áreas como la economía, la medicina, química, biología, comunicaciones, logística, etc. y otras áreas especializadas como electricidad y electrónica, automóviles, aeronáutica y astronáutica, robótica, biomecánica, mecatrónica, micro-electromecánica, etc., han traído consigo nuevos sistemas con alto grado de complejidad y nuevas exigencias respecto al rendimiento de los controladores [1].

El problema que se aborda en este trabajo consiste en obtener una ley de control adaptativo $u(t)$ capaz de estabilizar en una vecindad punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ del espacio de estados a un helicóptero de laboratorio con doble rotor, dos grados de libertad, dos entradas y dos salidas (de aquí en adelante TRMS por las siglas en inglés: Twin Rotor Multiple-input Multiple-output System) el cual puede modelarse matemáticamente por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y presenta las siguientes propiedades:

- orden superior ($x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$),
- altamente no lineal,
- los parámetros están cambiando con el tiempo,
- múltiples entradas y múltiples salidas ($u \in \mathbb{R}^p$, $y = h(x) \in \mathbb{R}^q$, $p, q > 1$).

La finalidad de elegir al TRMS como el sistema dinámico de prueba es que tiene propiedades similares a la mayoría de los sistemas dinámicos de interés actual, y los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser extrapolados a una amplia variedad de sistemas dinámicos.

Respecto al estado del arte en este tema, podemos encontrar la siguiente información. La solución al problema del control automático de orientación y posición de aeronaves se intensificó durante la segunda guerra mundial, desde entonces éste problema ha prevalecido [2]. En 2002 la empresa Feedback publica la maqueta TRMS versión 33-220 con comunicación a computadora y operación con MATLAB 6.5 y Simulink 4.0 [3] donde se encuentra un modelo del TRMS muy simplificado y se proponen controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo); versiones posteriores del TRMS 33-220 incluyen un modelo mejorado y se agrega un controlador LQR (Regulador Cuadrático Lineal) [4].

Existen trabajos respecto al diseño de sistemas de control con referencia al TRMS por aplicación de control robusto como H_∞ y modos deslizantes [5, 6]; otros trabajos incluyen la identificación y estimación mediante algoritmos genéticos y difusos [7, 8, 9, 10]. En general, las nuevas propuestas de control adaptativo emplean, redes neuronales como en [11, 12].

En 2006 se publica un modelo matemático refinado para el TRMS con el enfoque de Newton y Lagrange [13]. En general, para fines de diseños de controladores, son de utilidad modelos paramétricos y no paramétricos [14]; sin embargo, para la teoría de control moderno es necesario un modelo paramétrico descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales del cual puede obtenerse una estructura a partir de principios físicos, posteriormente simplificar el modelo por aplicación de técnicas tales como la normalización y análisis de perturbaciones singulares [15, 16, 17], finalmente ajustar el modelo teórico a los datos experimentales de la planta por una adecuada estimación de los parámetros [18].

Por otra parte, el ajuste de modelo por estimación de parámetros puede formularse como un problema inverso [19] donde se deben atender problemas tales como el condicionamiento del problema, convergencia y unicidad de la solución [20]. En [14] se encuentran las técnicas más comunes de modelado y ajuste de modelo (paramétricos y no paramétricos) de sistemas dinámicos, y en [21] se presenta un enfoque a la aplicación con uso de Matlab (particularmente el Toolbox Identification System). En este trabajo se aplica el método de mínimos cuadrados [22] con factor de olvido exponencial [23] y el algoritmo recursivo para la estimación en tiempo real que es empleado como parte de los reguladores adaptativos [24, 25, 26].

En general, los diseños de control se basan en la retroalimentación del vector de estados; sin embargo, en la práctica no son accesibles todas las componentes del vector de estados y se hace necesario el diseño de un observador de estados para estimar las componentes no accesibles [27]; para el caso particular de vehículos aéreos se eligen observadores basados en cuaterniones [28] debido a la simplicidad, economía computacional y no singularidad para ciertas secuencias de rotaciones (efecto gimbal [29]).

El enfoque del trabajo es tanto analítico, como de simulación y experimentación; el desarrollo puede resumirse en los siguientes puntos:

1. Se analiza el modelo del sistema sobre el que se va a trabajar.
2. Se estudian los métodos de estimación de parámetros y las teorías de control adaptativo que se emplearán; se mencionan otras teorías de control con la finalidad de realizar comparaciones de rendimiento.
3. Se estiman los parámetros del sistema para ajustar el modelo.
4. Mediante simulación, se obtienen resultados preliminares sobre el rendimiento de los controladores y algoritmos en cuestión.
5. Finalmente se aplican los algoritmos resultantes al sistema real.

Sobre el primer punto, se emplean las leyes de Newton para la deducción del modelo; sobre el segundo punto, para el caso lineal, se analizan estimación de parámetros por mínimos cuadrados para estimación *fuera*

de línea y estimación *en línea*; para el caso no lineal, se analizan los métodos de linealización o método de Newton, Gauss-Newton y el método de Levenber-Marquardt. Respecto a las teorías de control se presentan el regulador cuadrático lineal (LQR), LQR con acción integral, control adaptativo por modelo de referencia con enfoques de gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov.

Para el tercer punto, se construye un programa en MATLAB para la captura y procesamiento de datos en tiempo real¹ para estimar los parámetros del sistema y ajustar el modelo; para el cuarto punto, se obtienen las señales de control $u(t)$ correspondientes a cada una de las teorías de control mencionadas en el párrafo anterior y se prueban mediante simulación; finalmente, en el quinto punto, se realiza la implementación en MATLAB para funcionar en tiempo real y controlar el sistema real.

En este trabajo el sistema TRMS se dividió en subsistemas con la finalidad de llegar al resultado final de manera progresiva y en nivel ascendente de complejidad; más aún, se emplearon algunos ejemplos con la finalidad de reforzar la comprensión del tema correspondiente.

Los resultados que se obtienen incluyen el diseño satisfactorio y la implementación del control $u(t)$ para la estabilización del TRMS en una vecindad del punto $\bar{x}$ del espacio de estados con tolerancia a las variaciones de los parámetros. Otros resultados son la implementación de algoritmos de estimación de parámetros en MATLAB-Simulink para modelos lineales y no lineales. Se presentan algunas aplicaciones y ejemplos ajenos al TRMS con la finalidad de reforzar la comprensión del lector.

Las conclusiones con las que se finaliza este trabajo son recomendaciones y una clasificación de los algoritmos de estimación de parámetros y estrategias de control de acuerdo al rendimiento, economía computacional y exactitud de los resultados.

La redacción de este trabajo está dividido en una introducción, cinco capítulos y cuatro apéndices. El capítulo presenta el modelo matemático del motor DC y el TRMS; el capítulo dos presenta el tema de identificación de sistemas y estimación de parámetros; el capítulo tres está dedicado a la presentación de la teoría de control adaptativo; en el capítulo cuatro se presenta el diseño y la implementación de los controladores para el TRMS; en el capítulo cinco se presentan los resultados y las conclusiones; en el apéndice A se presenta un algoritmo para la estimación de velocidad y aceleración angular que fue empleado para estimar los parámetros del motor del TRMS; en el apéndice B se presenta un algoritmo para la estimación de derivadas de orden superior por ajuste polinomial y traslación de datos; en el apéndice C se presentan diseños de controladores adaptativos para el motor DC y la implementación; finalmente, en el apéndice D se presentan las herramientas matemáticas y definiciones básicas empleadas en este trabajo.

¹ver definición 35 en el capítulo D

Modelo matemático del motor DC y del TRMS

La simplicidad de la naturaleza no debe ser medida por la de nuestros conceptos. Infinitamente variada en sus efectos, la naturaleza es simple sólo en sus causas, y su economía consiste en producir un gran número de fenómenos, a menudo muy complicados, por medio de un número muy pequeño de leyes generales.

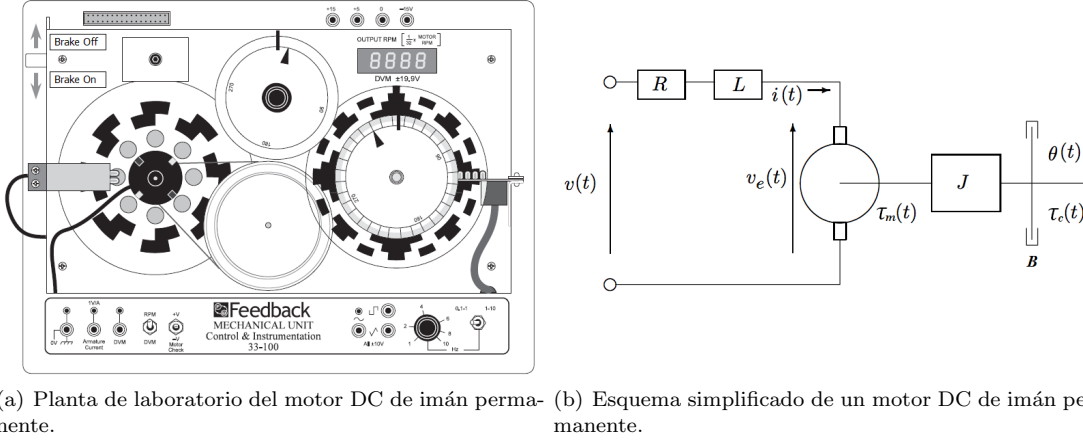
P. S. Laplace.

En este capítulo se presenta una descripción física del TRMS de la cual se deducirán las ecuaciones que describan su comportamiento (modelo matemático). Es preciso señalar que, debido a la complejidad del TRMS, como estrategia para resolver el problema de estimación de parámetros y control, se emplea un motor DC como planta auxiliar de menor complejidad que presenta ciertas propiedades útiles que permitirán validar los algoritmos que se desarrollarán en los capítulos posteriores y de esta manera asegurar que tales algoritmos funcionen correctamente cuando se apliquen al TRMS.

1.1. Motor DC

El motor de corriente directa (DC) de laboratorio empleado en este trabajo, es un motor de *imán permanente* fabricado por la empresa *Feedback Instruments Limited* [30] diseñado para ser operado desde la plataforma de Matlab Simulink; en Fig. 1.1(a) se muestra un dibujo de este motor. Éste motor está equipado con un tacómetro analógico, encoders como medidores de posición angular con resolución de $2\pi/32$ rad., un sensor de corriente de armadura, engranaje de reducción de velocidad y freno magnético de operación manual. La tarjeta de adquisición de datos para la comunicación con la computadora es una PCI-1711 con 16 canales para entradas analógicas, 2 canales para salidas analógicas, 2 canales de 8 bits para entradas digitales, 2

canales de 8 bits para salidas analógicas, un contador de eventos y temporizador programable. Opera con una frecuencia de hasta 100 kHz y los convertidores A/D son de 12 bits.



(a) Planta de laboratorio del motor DC de imán permanente. (b) Esquema simplificado de un motor DC de imán permanente.

Figura 1.1: Motor DC de laboratorio empleado en este trabajo.

Tomando como referencia el esquema mostrado en Fig. 1.1(b) de un motor DC de imán permanente, se pueden apreciar dos subsistemas: un subsistema eléctrico y un subsistema mecánico. El subsistema eléctrico puede modelarse aplicando las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff; mientras que el subsistema mecánico se puede modelar aplicando las leyes de Newton.

De las leyes de Kirchhoff se sabe que la suma de las caídas de voltaje en cada elemento de un circuito eléctrico es igual al voltaje aplicado; para el caso particular mostrado en Fig. 1.1(b), la suma del voltaje en el resistor v_R , el voltaje en el inductor v_L y el voltaje contraelectromotriz v_e es igual al voltaje aplicado $v(t)$. Por la ley de Ohm, se sabe que $v_R = Ri(t)$ donde $i(t)$ es la corriente en el circuito eléctrico y R la constante de resistencia eléctrica. De acuerdo con la ley de Faraday y la Ley de Lenz se sabe que $v_L = Ldi(t)/dt$ donde L es una constante de proporcionalidad conocida como inductancia o coeficiente de inducción. Finalmente, el subsistema eléctrico puede ser modelado por la ecuación (1.1a).

Por otro lado, de las leyes de Newton se sabe que la suma de los torques en el subsistema mecánico es igual al torque aplicado (generado por los pares electromagnéticos). Particularmente, se considera el torque por fricción (viscosa) $B\omega(t)$ donde B es la constante de fricción y $\omega(t)$ es la velocidad angular; el torque por fuerza de inercia $Jd\omega(t)/dt$ donde J es el coeficiente de inercia y finalmente, se considera un torque generado por carga externa τ_c ; con lo anterior se obtiene la ecuación (1.1b) que describe el subsistema mecánico. La ecuación (1.1d) es una hipótesis la cual físicamente consiste en liberar al motor de torque externo en el eje.

Se consideran las expresiones de acoplamiento entre subsistemas (1.1c) donde K es la constante de acoplamiento; en general existe una constante de acoplamiento eléctrica K_e para la ecuación $v_e = K_e\omega(t)$ y una constante de acoplamiento mecánica K_m para la ecuación $\tau_m = K_m i(t)$; sin embargo, por datos experimentales previos se tiene que $K_e \approx K_m$ y, por simplicidad, ambos se representan por K .

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_e(t). \quad (1.1a)$$

$$\tau_m(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + \tau_c(t). \quad (1.1b)$$

$$\begin{aligned} v_e &= K\omega(t). \\ \tau_m &= Ki(t). \end{aligned} \quad (1.1c)$$

$$\tau_c = 0. \quad (1.1d)$$

La representación de un sistema dinámico basado en ecuaciones diferenciales ordinarias no es única; ésto se debe principalmente a que se puede elegir como *variable de estado* cualquier función $x(t) \in \mathcal{C}^1$ asociada a las ecuaciones de movimiento del sistema. Teniendo presente ésta propiedad, se puede trabajar con variantes del modelo dependiendo de cuál sea más conveniente para el problema que se esté tratando. En los párrafos siguientes se presentan variantes del modelo (1.1), incluso se presenta un modelo de orden reducido aplicando la simplificación $L \approx 0$.

Modelo con estados ω, i . Si se eligen como variables de estados a $\omega(t)$ y $i(t)$, las ecuaciones (1.1) pueden ser expresadas en la forma de espacio de estados como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = \omega(t) \\ x_2 = i(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -B/J & K/J \\ -K/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v(t) = Ax + Bv(t), \quad (1.2)$$

Modelo con estados $\omega, \dot{\omega}$. Para facilitar la notación, se define el operador derivada temporal $p = d/dt$ tal que se pueda escribir $dx(t)/dt = px(t) = \dot{x}(t)$. De esta manera, las ecuaciones (1.1) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} v(t) &= (R + Lp)i(t) + K\omega(t), \\ Ki(t) &= (Jp + B)\omega(t), \end{aligned}$$

con lo cual, despejando $i(t)$ de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, se obtiene la ecuación:

$$K \frac{v(t) - K\omega(t)}{R + Lp} = (Jp + B)\omega(t).$$

y con ésta última ecuación se puede obtener la expresión que relaciona la entrada $v(t)$ con la salida $\omega(t)$ como:

$$G_2(p) = \frac{\omega(t)}{v(t)} = \frac{K}{(Lp + R)(Jp + B) + K^2}. \quad (1.3)$$

Observe que la función $G_2(p)$ representa una ecuación de segundo orden que puede resolverse para condiciones iniciales distintas de cero ya que el operador derivada temporal $p = d/dt$ es explícito; sin embargo, si se considera resolverse para condiciones iniciales iguales a cero, entonces el operador derivada p coincide con la variable compleja del dominio de la transformada de Laplace s con lo cual, bajo estas condiciones, la función $G_2(p) = G_2(s)$ es conocida como *función de transferencia*.

Tomando como referencia la ecuación (1.3), se deduce una única ecuación de segundo orden que incluye a los subsistemas eléctrico y mecánico de la siguiente forma:

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{R}{L} + \frac{B}{J} \right) \dot{\omega} + \frac{RB + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} v. \quad (1.4)$$

Si se eligen como variables de estados a $\omega(t)$ y $\dot{\omega}(t)$, las ecuaciones (1.1) pueden ser expresadas en la forma de espacio de estados como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = \omega(t) \\ x_2 = \dot{\omega}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R}{L} - \frac{B}{J} & -\frac{RB + K^2}{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{LJ} \end{bmatrix} v = Ax + Bv. \quad (1.5)$$

Modelo de primer orden. En la práctica, para motores DC pequeños, la inductancia es “pequeña” ($L \ll 1$); si además, por información a priori; obtenida por ejemplo por estimación directa de la inductancia

o por análisis de la gráfica del estado transitorio; se puede justificar que la inductancia es despreciable $L \approx 0$, entonces, la función (1.3) se reduce a

$$G_1(p) = \frac{\omega}{v} = \frac{K}{RJp + RB + K^2}, \quad (1.6)$$

que permite escribir una ecuación de primer orden para los subsistemas acoplados del motor DC como:

$$\dot{\omega} + \left(\frac{B}{J} + \frac{K^2}{RJ} \right) \omega = \frac{K}{RJ} v. \quad (1.7)$$

1.2. El TRMS

El sistema con dos rotores de múltiple entrada y múltiple salida (*Twin Rotor MIMO (Multiple-Input, Multiple-Output) System, (TRMS)*), es una configuración de laboratorio desarrollado por la empresa Feedback Instruments Limited [3, 13] diseñada para probar algoritmos de control, ver Fig. 1.2(a). A pesar de que estructuralmente el TRMS es similar a un helicóptero real, el TRMS es una versión simplificada de este último. A continuación, se mencionan las principales simplificaciones y diferencias del TRMS en comparación con un helicóptero real.

1.2.1. Simplificaciones y diferencias del TRMS con un helicóptero real

El TRMS es una planta de laboratorio diseñada para realizar experimentos de modelado y control; no es una planta funcional en el sentido de imitar el trabajo que puede realizar un helicóptero, pero sí conserva algunas propiedades de interés para poner a prueba teorías de modelado y control. Las dos principales simplificaciones del TRMS respecto a un helicóptero real son (ver Fig. 1.2):

1. Para un helicóptero, y en general para vehículos aéreos, los grados de libertad son seis: la posición en el espacio (x, y, z) y la orientación (*elevación, desvío, rotación*); en contraste, el TRMS tiene posición espacial fija y respecto a la orientación, no hay posibilidad de rotación, por lo que el TRMS solo tiene dos grados de libertad: elevación y desvío.
2. Para un helicóptero real, los rotores son los actuadores del sistema; sin embargo, se tienen seis grados de libertad a controlar, por lo que el sistema es sub-actuado (existen más grados de libertad que actuadores); en contraste, el TRMS tiene dos grados de libertad y dos actuadores, por lo que el sistema es completamente acutado (existen igual grados de libertad que número de actuadores).
3. Para un helicóptero real, la dinámica del vuelo es afectada en gran medida por las condiciones ambientales (clima, temperatura, altura, turbulencia, etc.) para el TRMS las condiciones de operación se suponen ideales (altura constante, medio homogéneo y sin turbulencias, etc.).

Por otro lado, en el cuadro 1.1 se muestran las principales diferencias entre el TRMS y un helicóptero real. Para simplificar la obtención del modelo, también se consideran las siguientes supuestos:

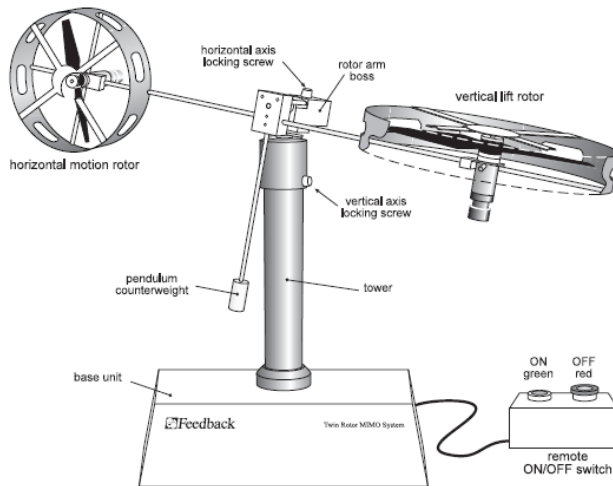
- El sistema está aislado. En el sistema no actúan fuerzas externas y se considera en un sistema de referencia inercial.

- Cálculo de inercia. Los cálculos de los momentos se simplifican asumiendo que las partes del TRMS son geoméricamente simples.
- Centro de rotación. Se asume que la barra que sujeta los rotores y la torre se encuentran articulados de tal forma que los ejes de simetría de la barra y la torre se cruzan en el punto de articulación.
- La fricción se considera de tipo viscosa a excepción de los rotores donde se considera también la fricción por arrastre.

Además de las simplificaciones anteriores, para la obtención del modelo matemático del TRMS, se estudian por separado el *modelo de los rotores* y el *modelo de la mecánica* del TRMS de manera independiente y al final se acoplan los dos modelos en uno solo para el sistema completo.

1.2.2. Descripción general

El TRMS tiene dos entradas que son los voltajes aplicados a los motores que influye directamente en la velocidad de rotación ω_v y ω_h de las hélices; éstas a su vez generan las fuerzas $F_v(\omega_v)$ y $F_h(\omega_h)$ en los planos vertical y horizontal; las posiciones angulares α_v (*elevación*), α_h (*desvío*) son los ángulos que se miden en los planos vertical y horizontal respectivamente y son las *salidas* a controlar, ver Fig. 1.3.



(a) Sistema helicóptero de laboratorio con doble rotor de múltiples entradas y múltiples salidas (TRMS). (b) Helicóptero militar estadounidense Boeing AH-64 Apache.

Figura 1.2: Diferencias entre el TRMS y un helicóptero real.

El TRMS es percibido como un problema difícil en las áreas de modelación y control de sistemas dinámicos debido principalmente a las tres características siguientes [31]:

1. Es un sistema altamente no lineal.
2. Los movimientos de los planos vertical y horizontal están acoplados.
3. No todos los estados del sistema son medibles o accesibles.

En Fig. 1.4(a) pueden visualizarse las partes y los movimientos del TRMS junto con las fuerzas generadas por los rotores. La barra transversal está pivotada a una torre permitiendo dos grados de libertad.

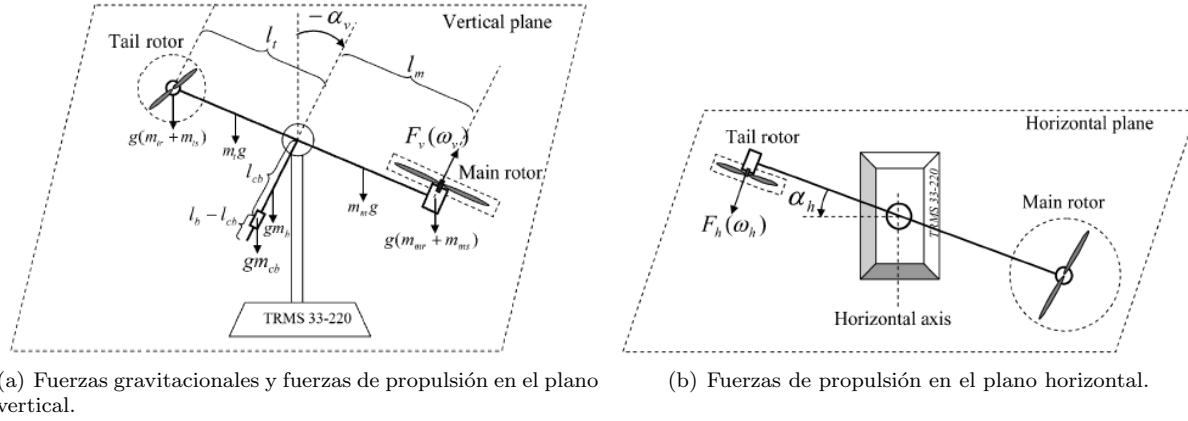


Figura 1.3: Movimiento del TRMS en el plano vertical y horizontal.

Cuadro 1.1: Principales diferencias entre un helicóptero birotor real y el TRMS.

Característica	TRMS	Helicóptero
Localización del punto de pivote.	A la mitad entre los dos rotores.	En el rotor principal.
Generación de elevación o control vertical.	Control de velocidad del rotor principal.	Control de inclinación*.
El desvío (yaw) es controlado por:	Velocidad del rotor de cola.	Ángulo de inclinación de las palas del rotor de cola.
Control cíclico.**	No.	Si, para control direccional.

*El ángulo de inclinación de las palas del rotores es variable, pero la velocidad es constante.

**Plato cíclico para modificar la orientación del eje perpendicular a la superficie de giro de las hélices.

En los dos extremos de la barra se sujetan dos rotores dispuestos perpendicularmente entre si. El rotor principal genera empuje vertical, el rotor de cola genera empuje en el plano horizontal.

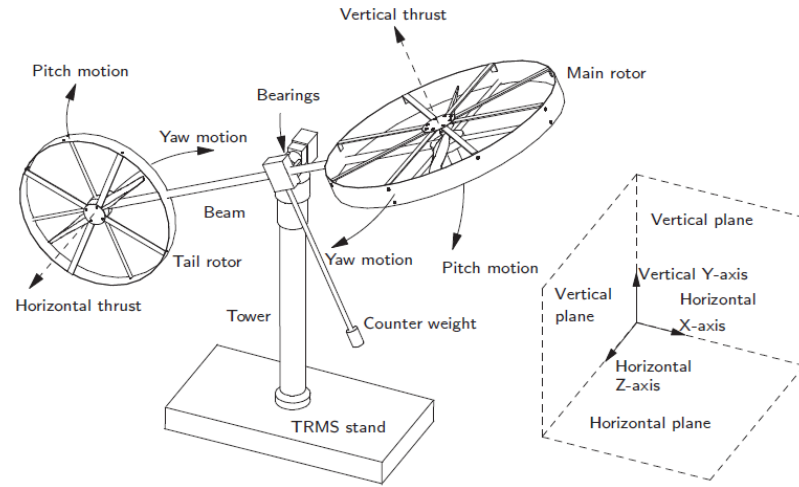
Las entradas del sistema son los dos voltajes que se aplican a los dos motores de DC que conforman los rotores. Las dos salidas del sistema son las posiciones angulares en el plano vertical y horizontal que son medidas por dos sensores de tipo encoder incremental.

El movimiento del sistema está limitado por restricciones mecánicas las cuales solo permiten el movimiento para $\theta_h = \pm 2.8$ rad. en el plano horizontal y $\theta_v = [+1.2, -1]$ rad. para el plano vertical. En Fig. 1.4(b) se muestran los límites del movimiento.

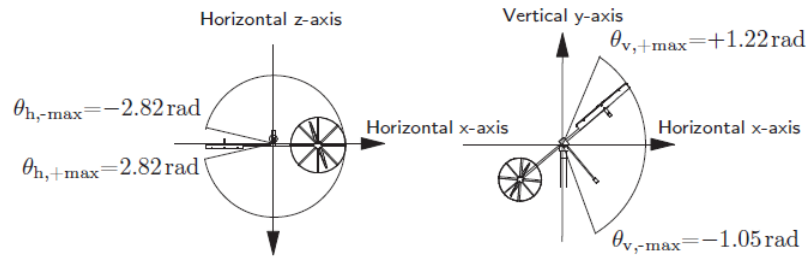
1.2.3. Modelo del rotor

Los propulsores del TRMS son dos rotores. Para el TRMS, un rotor consisten en un motor DC que tiene acoplado en su eje de giro una hélice; de ésta manera, el modelo del rotor es prácticamente el modelo del motor DC y la adición de un término de *fricción de arrastre* debido al efecto de abatimiento de las paletas de la hélice con el viento (medio viscoso).

Los motores con los cuales está equipado el TRMS son motores DC con *excitación separada*. Cuando son excitados por una corriente de campo i_f y una corriente de armadura i_a , el motor desarrolla una fuerza



(a) Disposición de los rotores y dirección de la fuerza de empuje que generan, movimientos angulares del sistema y marco de referencia.



(b) Espacio de trabajo por limitaciones mecánicas del sistema.

Figura 1.4: Descripción física del TRMS así como los límites en el movimiento angular.

contraelectromotriz (fem inducida) y un par de torsión para balancear el par de carga a determinada velocidad. La corriente de campo i_f de un motor con excitación separada es independiente de la corriente de armadura i_a . Típicamente, la corriente de campo es mucho menor que la corriente de armadura. En Fig. 1.5 se muestra un circuito equivalente del motor de CD con excitación separada.

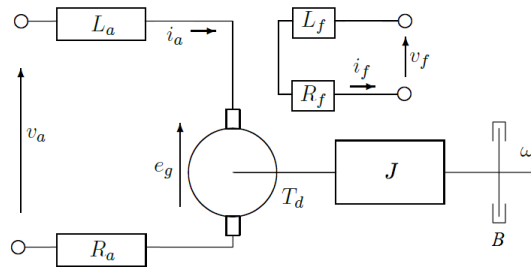


Figura 1.5: Diagrama de bloques del modelo simplificado de un motor DC con excitación separada.

Las ecuaciones que describen la dinámica de un motor DC con excitación separada se pueden escribir como [32]:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}, \quad (1.8a)$$

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_g, \quad (1.8b)$$

$$T_d = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_L, \quad (1.8c)$$

$$e_g = K_v i_f \omega, \quad (1.8d)$$

$$T_d = K_t i_f i_a. \quad (1.8e)$$

donde

- v_a, v_f, e_g = voltaje de armadura, de campo y contraelectromotriz, $[V]$,
- i_a, i_f = corriente en el circuito de armadura y de campo, $[A]$,
- T_d = par motor electromagnético, $[Nm]$,
- ω = velocidad angular del motor, o frecuencia angular del rotor, $[rad/s]$,
- B = coeficiente de fricción viscosa, $[Nm/rad/s]$,
- J = coeficiente de inercia, $[Nm/rad/s^2]$,
- K_v = constante de voltaje, $[V/A - rad/s]$,
- K_t = constante de par motor, en la práctica $K_t \approx K_v$,
- L_a, L_f = inductancia del circuito de armadura y de campo, $[H]$,
- R_a, R_f = Resistencia del circuito de armadura y de campo, $[\Omega]$,
- T_L = par de carga, $[Nm]$.

La electrónica de potencia para estos motores es tal que alimenta el circuito de campo del motor en el instante t_0 (cuando se enciende la planta) con un voltaje v_f constante. Se considera disponibilidad de los motores hasta un tiempo $t > t_f$ donde $[t_0, t_f]$ es el intervalo temporal donde ocurre el estado transitorio del circuito de campo, para $t > t_f$ el circuito de campo está en estado estacionario y por lo tanto i_f es constante.

Considerando i_f igual a una constante y ya que por información a priori experimental, en la práctica se puede suponer que $K_t \approx K_v$ entonces se considera la siguiente definición:

$$i_f = \frac{v_f}{R_f}, \quad K := K_t i_f \approx K_v i_f, \quad (1.9)$$

por lo que se pueden reescribir las ecuaciones (1.8) como:

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\omega, \quad (1.10a)$$

$$K i_a = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_L, \quad (1.10b)$$

de esta manera, los motores de excitación separada se pueden considerar como motores de imán permanente como los estudiados en la sección anterior, por esta razón, de aquí en adelante se elimina el subíndice a en v_a, i_a, R_a, L_a de las ecuaciones (1.10a) y (1.10b).

Los motores empleados para los rotores del TRMS tienen las mismas series y especificaciones de producción; sin embargo, las hélices aportan una fricción no lineal por el efecto del abatimiento de las paletas de las hélices con el viento, ésta fricción es conocida como *fricción de arrastre* y es la única diferencia entre el modelo del motor y el modelo del rotor. Podemos escribir dos ecuaciones, una para el subsistema eléctrico (1.11a) y otra para el subsistema mecánico (1.11b) donde la fricción de arrastre se modela por el término $D|\omega|\omega$ donde D es el coeficiente de fricción de arrastre y $|\cdot|$ representa el valor absoluto.

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K\omega, \quad (1.11a)$$

$$Ki = J\dot{\omega}(t) + B\omega + D|\omega|\omega. \quad (1.11b)$$

Con la finalidad de reducir el modelo, se someterá a un proceso de normalización para expresar al sistema en la forma perturbada singularmente y considerar al sistema degenerado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ [33, 34]. Considerando al sistema dimensionado

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dT} &= -KW - RI + U, \\ J \frac{dW}{dT} &= KI - BW - D|W|W, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde considerando la normalización de todas las cantidades excepto el tiempo $(L, R, U, K, J, B, D, I, W)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} L_* I_* \ell \frac{di}{dT} &= -K_* W_* k\omega - R_* I_* ri + U_* u, \\ J_* W_* j \frac{d\omega}{dT} &= K_* I_* ki - B_* W_* b\omega - D_* W_*^2 d|\omega|\omega, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde:

$$J_* = M_* L_*^2, \quad K_* = \frac{M_* L_*^2}{T_*^2 I_*}, \quad U_* = \frac{M_* L_*^2}{T_*^3 I_*}, \quad F_* = \frac{M_* L_*}{T_*^2}, \quad I_*^2 = \frac{M_* L_*}{T_*^2}, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{L_* I_*}{U_*} \ell \frac{di}{dT} &= -k\omega - ri + u, \\ \frac{J_* W_*}{F_* L_*} j \frac{d\omega}{dT} &= ki - b\omega - d|\omega|\omega, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde las cantidades $\frac{L_* I_*}{U_*}$, $\frac{J_* W_*}{F_* L_*}$ tienen unidades de tiempo y se definen como tiempo eléctrico y tiempo mecánico T_e , T_m respectivamente. Por resultados de la estimación de parámetros del sistema, se sabe que $T_m \ll T_e$ por lo que se elige a T_m como la unidad de tiempo. Se realiza el cambio de variable $t = T/T_m$ para adimensionalizar el sistema y se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{T_e}{T_m} \frac{di}{dt} &= -\frac{k}{\ell}\omega - \frac{r}{\ell}i + \frac{1}{\ell}u, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k}{j}i - \frac{b}{j}\omega - \frac{d}{j}|\omega|\omega, \end{aligned} \quad (1.16)$$

y ahora se puede representar al sistema en la forma estándar con un parámetro adimensional físicamente significativo $\varepsilon = T_e/T_m$. Realizando el cambio de variable $x_1 = \omega$, $x_2 = i$ y la definición de las cantidades adimensionales:

$$\Delta_1 = \frac{k}{j}, \quad \Delta_2 = \frac{b}{j}, \quad \Delta_3 = \frac{d}{j}, \quad \Delta_4 = \frac{k}{\ell}, \quad \Delta_5 = \frac{r}{\ell}, \quad \Delta_6 = \frac{1}{\ell},$$

se obtienen las ecuaciones del sistema en la forma de un problema perturbado singularmente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Delta_1 x_2 - \Delta_2 x_1 - \Delta_3 |x_1| x_1, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -\Delta_4 x_1 - \Delta_5 x_2 + \Delta_6 u. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Considerando a ε lo suficientemente pequeño, se puede considerar trabajar con el sistema degenerado el cuál se obtiene en el caso donde $\varepsilon = 0$, por lo que se reduce el orden del sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Delta_1 x_2 - \Delta_2 x_1 - \Delta_3 |x_1| x_1 \\ 0 &= -\Delta_4 x_1 - \Delta_5 x_2 + \Delta_6 u \end{aligned} \quad (1.18)$$

y sustituyendo la ecuación algebraica en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\dot{x}_1 = -\delta_1 |x_1| x_1 - \delta_2 x_1 + \delta_3 u, \quad (1.19)$$

donde $\delta_1 = \Delta_3$, $\delta_2 = \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_5} + \Delta_2$, $\delta_3 = \frac{\Delta_1 \Delta_6}{\Delta_5}$. Finalmente, expresando nuevamente en las variables de configuración se tiene:

$$\dot{\omega} = -\frac{D}{J} |\omega| \omega - \left(\frac{K^2}{JR} + \frac{B}{J} \right) \omega + \frac{K}{JR} v. \quad (1.20)$$

1.2.4. Modelo de la mecánica del TRMS

Para simplificar la explicación del movimiento del TRMS, los movimientos son divididos en aquellos que ocurren en el plano vertical y los que ocurren en el plano horizontal (ver Fig. 1.6(a)).

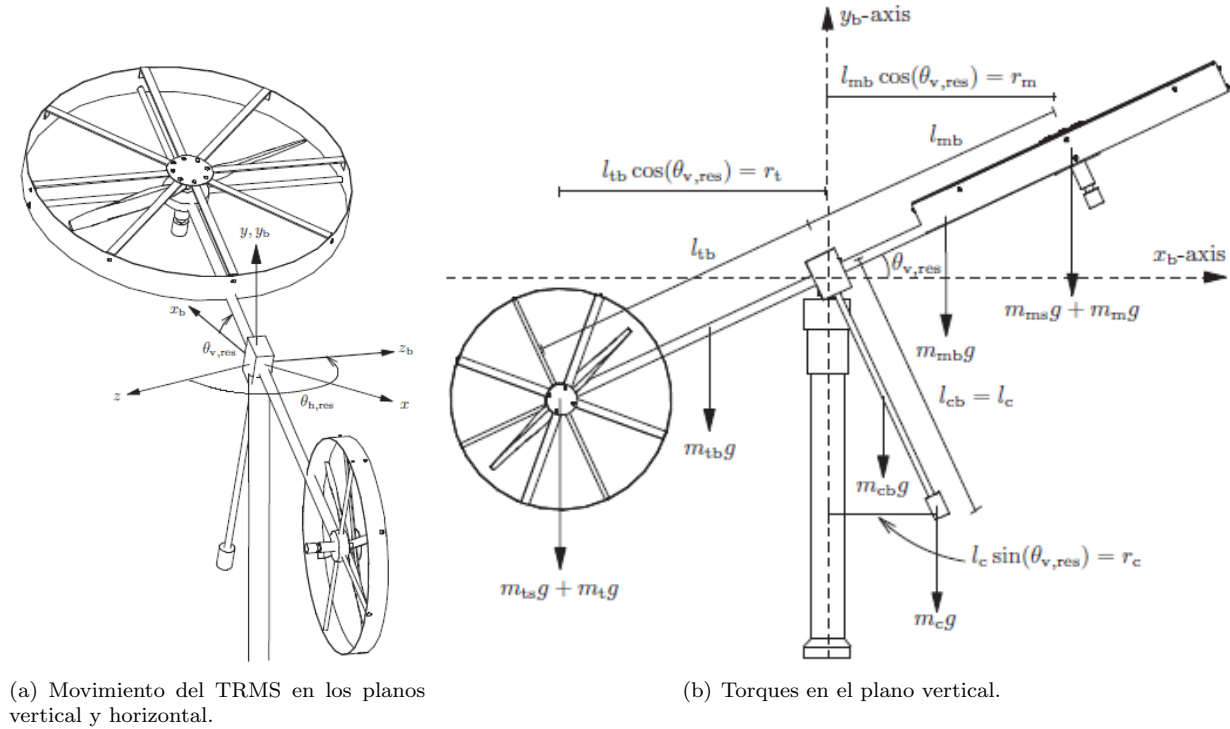


Figura 1.6: Movimiento angular del TRMS y los torques en el plano vertical.

Torques en el plano vertical

En el plano vertical se consideran cinco torques que actúan en el TRMS (ver Fig. 1.6(b)):

1. Torque τ_m generado por los rotores.
2. Torque τ_g generado por la fuerza de gravedad.

3. Torque τ_c generado por la fuerza centrífuga.
4. Torque τ_{fv} generado por la fuerza de fricción.
5. Torque τ_s generado por el efecto giróscopo.

El **torque generado por los rotores** puede ser modelado como la suma de los torques que proporcionan el rotor principal y de cola de manera independiente como:

$$\tau_m(\omega_m, \omega_t) = l_m F_{vm}(\omega_m) + l_t F_{vt}(\omega_t), \quad (1.21)$$

donde F_{vm} y F_{vt} son las fuerzas de propulsión en el plano vertical generadas por el rotor principal y de cola respectivamente. Considerando que el empuje generado por los rotores es proporcional a la velocidad angular al cuadrado a la que giran las hélices, elegimos las funciones $F_{vm,vt}$ como:

$$\begin{aligned} F_{vm}(\omega_m) &= k_m |\omega_m| \omega_m, \\ F_{vt}(\omega_t) &= k_{tn} |\omega_t| \omega_t. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Suponiendo $k > 0$, entonces la expresión $F = k|\omega|\omega$ tienen el signo de ω ; por esta razón no se empleó ω^2 en las ecuaciones (1.22) en cuyo caso $F \geq 0$ para $\omega \in \mathbb{R}$. Si $F \geq 0$ físicamente significa que, independientemente del sentido del giro (signo de ω), los rotores siempre ejerce fuerza de propulsión en una dirección, lo cual no es verdad; la dirección de propulsión cambia con el sentido del giro, ésta es la razón por la que se elige la expresión $|\omega|\omega$ para conservar el signo de ω . Finalmente, la ecuación que representa el torque generado por los rotores en el plano vertical es:

$$\tau_m(\omega_m, \omega_t) = l_m k_m |\omega_m| \omega_m + l_t k_{tn} |\omega_t| \omega_t. \quad (1.23)$$

El **torque por fuerza de gravedad** puede ser dividido en tres partes: la parte principal de la barra (1.24a), la parte de cola (1.24b) y la parte del contrapeso (1.24c), ver Fig. 1.6(b).

$$\tau_{g,m} = -g \left(\frac{m_{mb}}{2} + m_{ms} + m_{mm} \right) l_m \cos \theta_v, \quad (1.24a)$$

$$\tau_{g,t} = g \left(\frac{m_{tb}}{2} + m_{ts} + m_{tm} \right) l_t \cos \theta_v, \quad (1.24b)$$

$$\tau_{g,c} = g \left(\frac{m_{cb}}{2} l_c + m_{cm} l_{cm} \right) \sin \theta_v. \quad (1.24c)$$

Las ecuaciones (1.24) se pueden expresar en forma compacta como:

$$\tau_g = g ((A - B) \cos \theta_v - C \sin \theta_v), \quad (1.25)$$

donde $A = \left(\frac{m_{tb}}{2} + m_{ts} + m_{tm} \right) l_t$, $B = \left(\frac{m_{mb}}{2} + m_{ms} + m_{mm} \right) l_m$ y $C = \left(\frac{m_{cb}}{2} l_c + m_{cm} l_{cm} \right)$.

El **torque por fuerza centrífuga** se puede modelar como (1.26a), el **torque por fuerza de fricción** como (1.26b) y el **torque por efecto giróscopo** como (1.26c). Para más detalles sobre éste modelo, puede consultar [31, 13].

$$\tau_c = -\frac{1}{2} \Omega_h^2 H \sin 2\theta_v; \quad H = A l_t + B l_m + \frac{m_{cb}}{2} l_c^2 + m_{cm} l_{cm}^2. \quad (1.26a)$$

$$\tau_{fv} = -\Omega_v \mu_v. \quad (1.26b)$$

$$\tau_s = k_g F_v(\omega_v) \Omega_h \cos \theta_v. \quad (1.26c)$$

Torques en el plano horizontal

En el plano horizontal se consideran tres torques que actúan en el TRMS:

1. Torque τ_t generado por los rotores.
2. Torque τ_{fh} generado por la fuerza de fricción.
3. Torque τ_p generado por un “péndulo virtual”.

El **torque generado por los rotores** puede ser modelado como:

$$\tau_t(\omega_m, \omega_t) = [l_m F_{hm}(\omega_m) + l_t F_{ht}(\omega_t)] \cos \theta_v.$$

Considerando que el empuje generado por los rotores es proporcional a $|\omega_{m,t}| \omega_{m,t}$, se eligen las funciones $F_{hm,ht}$ como:

$$\begin{aligned} F_{hm}(\omega_m) &= k_{mn} |\omega_m| \omega_m, \\ F_{ht}(\omega_t) &= k_t |\omega_t| \omega_t. \end{aligned}$$

Finalmente se puede expresar:

$$\tau_t(\omega_m, \omega_t) = (l_m k_{mn} |\omega_m| \omega_m + l_t k_t |\omega_t| \omega_t) \cos \theta_v. \quad (1.27)$$

Se puede modelar el **torque por la fuerza de fricción** como (1.28) y el **torque por un péndulo virtual** como (1.29). Este último torque es generado por los cables de conexión los cuales ejercen un torque proporcional a la posición, por ello es que su efecto es similar al de un “péndulo” bajo la fuerza potencial gravitatoria, razón por la cuál se le refiere como “péndulo virtual”.

$$\tau_{fh} = -\Omega_h \mu_h. \quad (1.28)$$

$$\tau_p = -\theta_h k_p. \quad (1.29)$$

Momentos de inercia en el plano vertical

Para determinar el momento de inercia total en el plano vertical, éste es dividido en ocho partes, cada una descrita individualmente.

El motor DC principal es considerado un cilindro sólido donde $r_m^2 \ll l_m$, con lo cual se calcula el momento de inercia como

$$J_{v,m} = \frac{1}{2} m_{mm} r_m^2 + m_m l_m^2 \approx m_{mm} l_m^2. \quad (1.30)$$

El momento de inercia de la barra principal está dado como

$$J_{v,mb} = \frac{1}{3} m_{mb} l_m^2. \quad (1.31)$$

El momento de inercia del motor DC de cola

$$J_{v,t} \approx m_{mt} l_t^2. \quad (1.32)$$

El momento de inercia de la barra de cola

$$J_{v,tb} = \frac{1}{3}m_{tb}l_t^2. \quad (1.33)$$

El momento de inercia correspondientes al contrapeso y su barra son

$$J_{v,c} \approx m_c l_c^2, \quad (1.34)$$

$$J_{v,cb} = \frac{1}{3}m_{cb}l_{cb}^2. \quad (1.35)$$

Para los escudos de los rotores (aproximados a cilindros huecos) los momentos de inercia son

$$\begin{aligned} J_{v,ms} &= \frac{1}{2}m_{ms}r_{ms}^2 + m_{ms}l_{mb}, \\ J_{v,ts} &= m_{ts}r_{ts}^2 + m_{ts}l_{tb}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Finalmente, el momento de inercia total en el plano vertical puede escribirse como

$$\begin{aligned} J_v = \sum_{i=1}^8 J_{v,i} &= m_{mm}l_m^2 + \frac{1}{3}m_{mb}l_m^2 + m_{mt}l_t^2 + \frac{1}{3}m_{tb}l_t^2 + m_c l_c^2 + \\ &+ \frac{1}{3}m_{cb}l_{cb}^2 + \frac{1}{2}m_{ms}r_{ms}^2 + m_{ms}l_{mb} + m_{ts}r_{ts}^2 + m_{ts}l_{tb}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Momentos de inercia en el plano horizontal

El momento de inercia en el plano horizontal puede dividirse en ocho partes. El momento de inercia del motor principal, donde $r_{t,m} \ll l_{mb}$, puede escribirse como

$$J_{h,m} = \frac{1}{2}m_{mm}r_{t,m}^2 + m_m (l_{mb} \cos \theta_v)^2 \approx m_m (l_{mb} \cos \theta_v)^2. \quad (1.38)$$

El momento de inercia de la barra principal es

$$J_{h,mb} = \frac{1}{3}m_{mb} (l_{mb} \cos \theta_v)^2, \quad (1.39)$$

El momento de inercia del motor y barra de cola es descrita como

$$\begin{aligned} J_{h,tm} &\approx m_{mt} (l_{tr} \cos \theta_v)^2, \\ J_{h,tb} &= \frac{1}{3}m_{tb} (l_{tb} \cos \theta_v)^2. \end{aligned} \quad (1.40)$$

El momento del contrapeso y su barra es

$$\begin{aligned} J_{h,c} &\approx m_c (l_c \sin \theta_v)^2, \\ J_{h,cb} &= \frac{1}{3}m_{cb} (l_c \sin \theta_v)^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

El momento de los escudos de los rotores (aproximados a cilindros huecos) está dado por

$$\begin{aligned} J_{h,ms} &= m_{ms}r_{ms}^2 + m_{ms} (l_{mb} \cos \theta_v)^2, \\ J_{h,ts} &= \frac{1}{2}m_{ts}r_{ts}^2 + m_{ts} (l_{tb} \cos \theta_v)^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

El momento de inercia total en el plano horizontal puede expresarse como

$$J_h = \sum_{i=1}^8 J_{h,i} = m_m (l_{mb} \cos \theta_v)^2 + \frac{1}{3} m_{mb} (l_{mb} \cos \theta_v)^2 + m_{mt} (l_{tr} \cos \theta_v)^2 + \\ + \frac{1}{3} m_{tb} (l_{tb} \cos \theta_v)^2 + m_c (l_c \sin \theta_v)^2 + \frac{1}{3} m_{cb} (l_c \sin \theta_v)^2 + \\ + m_{ms} r_{ms}^2 + m_{ms} (l_{mb} \cos \theta_v)^2 + \frac{1}{2} m_{ts} r_{ts}^2 + m_{ts} (l_{tb} \cos \theta_v)^2 = D \cos^2 \theta_v + E \sin^2 \theta_v + F, \quad (1.43)$$

donde $D = (\frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms}) l_m^2 + (\frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts}) l_t^2$, $E = \frac{m_b}{3} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2$ y $F = \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 + m_{ms} r_{ms}^2$.

Finalmente se pueden expresar las ecuaciones de movimiento del sistema completo como:

$$\dot{\Omega}_v = \frac{-\mu_v \Omega_v - g[(A - B) \cos \theta_v - C \sin \theta_v] + l_m k_m |\omega_m| \omega_m}{J_v} + \\ + \frac{l_t k_{tn} |\omega_t| \omega_t - \frac{1}{2} \Omega_h^2 H \sin 2\theta_v + k_g (k_m |\omega_m| \omega_m + k_{tn} |\omega_t| \omega_t) \Omega_h \cos \theta_v}{J_v}, \quad (1.44a)$$

$$\dot{\Omega}_h = \frac{-\mu_h \Omega_h - k_p \theta_h + (l_m k_{mn} |\omega_m| \omega_m + l_t k_t |\omega_t| \omega_t) \cos \theta_v}{D \cos^2 \theta_v + E \sin^2 \theta_v + F}, \quad (1.44b)$$

$$\dot{\omega}_m = -\frac{D_m}{J_m} |\omega_m| \omega_m - \left(\frac{K_m^2}{J_m R_m} + \frac{B_m}{J_m} \right) \omega_m + \frac{K_m}{J_m R_m} v_m, \quad (1.44c)$$

$$\dot{\omega}_t = -\frac{D_t}{J_t} |\omega_t| \omega_t - \left(\frac{K_t^2}{J_t R_t} + \frac{B_t}{J_t} \right) \omega_t + \frac{K_t}{J_t R_t} v_t, \quad (1.44d)$$

donde (1.44a) corresponde a la ecuación de movimiento en el plano vertical, (1.44b) corresponde a la ecuación de movimiento en el plano horizontal, (1.44c) corresponde al rotor principal y (1.44d) corresponde al rotor de cola.

1.2.5. Modelo del TRMS en el espacio de estados

En esta sección se obtiene una representación alternativa del modelo del TRMS conocida como *modelo en el espacio de estados*. La finalidad de obtener este modelo es poder aplicar técnicas modernas de teoría de control, que se abordarán en capítulos posteriores, y realizar las pruebas de controlabilidad y observabilidad; éstas pruebas son necesarias para asegurar que es posible controlar el TRMS (en base al modelo) y que las variables de estado no medibles sí pueden ser estimadas (observación).

Se eligen como variables de estado las componentes del vector x y como entrada a las componentes del vector v :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = \theta_v \\ x_2 = \dot{\theta}_v = \Omega_v \\ x_3 = \theta_h \\ x_4 = \dot{\theta}_h = \Omega_h \\ x_5 = \omega_m \\ x_6 = \omega_t \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_m \\ v_t \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Teóricamente, para los fines de control, el conocimiento de los *parámetros físicos* no es estrictamente necesario; es posible trabajar sobre modelos normalizados adimensionales [16, 17], modelos cuyos parámetros no tengan interpretación física, incluso modelos no paramétricos [14]; ésto se puede aprovechar para reducir el número

de parámetros a estimar. Mas aún, como la estimación de parámetros puede formularse como un problema inverso [19], se puede dar el caso en que éste sea mal planteado y no pueda obtenerse una estimación fiable; la reducción de los parámetros en el modelo trae como primera ventaja un grado mayor de estabilidad en la estimación o incluso el buen planteamiento del problema.

Se propone reparametrizar el modelo (1.44) por agrupación de todos aquellos parámetros físicos que en el modelo aparecen como productos de ellos mismos, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \eta_1 x_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1 + (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) |x_5| x_5 + (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1) |x_6| x_6 + \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= \frac{\rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + (\rho_3 |x_5| x_5 + \rho_4 |x_6| x_6) \cos x_1}{\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7}, \\
\dot{x}_5 &= -d_m |x_5| x_5 - b_m x_5 + a_m v_m, \\
\dot{x}_6 &= -d_t |x_6| x_6 - b_t x_6 + a_t v_t,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

donde

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\mu_v}{J_v}, & \eta_2 &= g \frac{B-A}{J_v}, & \eta_3 &= g \frac{C}{J_v}, & \eta_4 &= \frac{l_m k_m}{J_v}, \\
\eta_5 &= \frac{l_t k_{tn}}{J_v}, & \eta_6 &= -\frac{H}{2J_v}, & \eta_7 &= \frac{k_g k_m}{J_v}, & \eta_8 &= \frac{k_g k_{tn}}{J_v}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{\mu_h}{D+F}, & \rho_2 &= -\frac{k_p}{D+F}, & \rho_3 &= \frac{l_m k_{mn}}{D+F}, & \rho_4 &= \frac{l_t k_t}{D+F}, \\
\rho_5 &= \frac{D}{D+F}, & \rho_6 &= \frac{E}{D+F}, & \rho_7 &= \frac{F}{D+F}.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}
d_m &= \frac{D_m}{J_m}, & b_m &= \frac{K_m^2}{J_m R_m} + \frac{B_m}{J_m}, & a_m &= \frac{K_m}{J_m R_m}, \\
d_t &= \frac{D_t}{J_t}, & b_t &= \frac{K_t^2}{J_t R_t} + \frac{B_t}{J_t}, & a_t &= \frac{K_t}{J_t R_t}.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Cabe señalar que la elección de los parámetros ρ_i $i = \overline{1, 7}$ en (1.48) puede parecer extraña (en el sentido de que es innecesaria) puesto que el divisor $D + F$ está presente en todos ellos y por lo tanto se puede eliminar y únicamente estaríamos renombrando los parámetros físico; sin embargo, la elección de dichos parámetros es conveniente para la tarea de estimación de parámetros como se verá en el capítulo 2 sección 2.7.4.

1.2.6. Análisis de controlabilidad y observabilidad

Tomando directamente el modelo (1.46) que es un modelo en la forma de Cauchy $\dot{x} = f(x, v)$, se puede analizar la controlabilidad y observabilidad del sistema en una vecindad del punto x^* en el espacio de trabajo, se procede a la linealización del sistema como:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, v}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{x^*}. \tag{1.50}$$

Considerando linealizar en el punto $x = x^* = \delta = [\delta_1 \ 0 \ \delta_3 \ 0 \ \delta_5 \ \delta_6]^T$, se tiene:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x^*} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\eta_2 \sin x_1 + \eta_3 \cos x_1 + 2\eta_6 x_4^2 \cos 2x_1 - (\eta_7 |x_5| x_5 + \eta_8 |x_6| x_6) x_4 \cos x_1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \eta_1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= 2\eta_6 x_4 \cos 2x_1 + (\eta_7 |x_5| x_5 + \eta_8 |x_6| x_6) \cos x_1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_5} &= 2\eta_4 |x_5| + 2\eta_7 |x_5| x_4 \cos x_1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_6} &= 2\eta_5 |x_6| + 2\eta_8 |x_6| x_4 \cos x_1,
\end{aligned}$$

donde las últimas dos ecuaciones se obtuvieron considerando $\frac{d|y|}{dy} = \text{sign}(y)$, $|y| = \text{sign}(y)y$.

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x^*} = \begin{bmatrix} -\eta_2 \sin \delta_1 + \eta_3 \cos \delta_1 & \eta_1 & 0 & (\eta_7 |\delta_5| \delta_5 + \eta_8 |\delta_6| \delta_6) \cos \delta_1 & 2\eta_4 |\delta_5| & 2\eta_5 |\delta_6| \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

$$\left. \frac{\partial f_3}{\partial x} \right|_{x^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Para simplificar la notación, se define:

$$\begin{aligned}
\zeta &:= \rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + (\rho_3 |x_6| x_6 + \rho_4 |x_5| x_5) \cos x_1, \\
\xi &:= \rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7, \\
\zeta_* &:= \zeta|_{x^*} = \rho_2 \delta_3 + (\rho_3 |\delta_6| \delta_6 + \rho_4 |\delta_5| \delta_5) \cos \delta_1, \\
\xi_* &:= \xi|_{x^*} = \rho_5 \cos^2 \delta_1 + \rho_6 \sin^2 \delta_1 + \rho_7,
\end{aligned} \quad (1.54)$$

con lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= 2 \frac{\zeta}{\xi^2} (\rho_5 - \rho_6) \sin x_1 \cos x_1 - \frac{1}{\xi} (\rho_3 |x_6| x_6 + \rho_4 |x_5| x_5) \sin x_1, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= \frac{\rho_2}{\xi}, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_4} &= \frac{\rho_1}{\xi}, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_5} &= 2\rho_4 \frac{1}{\xi} |x_5| \cos x_1, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_6} &= 2\rho_3 \frac{1}{\xi} |x_6| \cos x_1,
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f_4}{\partial x} \right|_{x^*, w=0} = \frac{1}{\xi_*} \begin{bmatrix} 2 \frac{\zeta_*}{\xi_*} (\rho_5 - \rho_6) \sin \delta_1 \cos \delta_1 - (\rho_3 |x_6| x_6 + \rho_4 |x_5| x_5) \sin x_1 & 0 & \rho_2 \\ \rho_1 & 2\rho_4 |x_5| \cos x_1 & 2\rho_3 |x_6| \cos x_1 \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5}{\partial x_i} &= 0, \quad i = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \\
\frac{\partial f_5}{\partial x_5} &= -2d_m |x_5| - b_m,
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f_5}{\partial x} \right|_{x^*, w=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_m|\delta_5| - b_m & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, 5},$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = -2d_t|x_6| - b_t,$$

$$\left. \frac{\partial f_6}{\partial x} \right|_{x^*, w=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_t|\delta_6| - b_t \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Reescribiendo en forma matricial, se obtiene la matriz del sistema linealizado como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta_2 \sin \delta_1 + \eta_3 \cos \delta_1 & \eta_1 & 0 & (\eta_7|\delta_5| + \eta_8|\delta_6|) \cos \delta_1 & 2\eta_4|\delta_5| & 2\eta_5|\delta_6| \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\frac{\xi_2}{\xi_*}(\rho_5 - \rho_6) \sin \delta_1 \cos \delta_1 - \frac{1}{\xi_*}(\rho_3|x_6| + \rho_4|x_5|x_5) \sin x_1 & 0 & \frac{\rho_2}{\xi_*} & \frac{\rho_1}{\xi_*} & \frac{2}{\xi_*}\rho_4|x_5| \cos x_1 & \frac{2}{\xi_*}\rho_3|x_6| \cos x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_m|\delta_5| - b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_t|\delta_6| - b_t \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

De manera similar, la matriz de entrada es:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_t \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

El TRMS está equipado con sensores que miden la posición angular en el plano vertical y horizontal, por lo que se tiene información sobre $\theta_v = x_1$ y $\theta_h = x_3$, por lo que la matriz de salida se puede escribir como:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

La controlabilidad y observabilidad se comprueban verificando que la matriz de controlabilidad y observabilidad P y Q son de *rango completo* [22] (ver la sección D.7.1).

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}[Q] = \text{Rank}[P] = 6. \quad (1.61)$$

Para calcular el rango de las matrices Q y P , se puede emplear el software Wolfram Mathematica con las instrucciones que se muestran en Fig. 1.7.

1.2.7. Implementación en MATLAB-Simuink

En esta sección se presenta una implementación del modelo (1.46) del TRMS en el lenguaje Simulink el cuál será de utilidad en los capítulos siguientes cuando se prueben los algoritmos de estimación de parámetros y, particularmente, los algoritmos de control. Con la finalidad de hacer más intuitiva la programación del modelo (1.46) en Simulink, se crean tres subsistemas: [Rotores], [MovVertical] y [MovHorizontal].

```

In[23]:= A =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & 0 & a24 & a25 & a26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a41 & 0 & a43 & a44 & a45 & a46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a66 \end{pmatrix}$ ; B =  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b51 & 0 \\ 0 & b52 \end{pmatrix}$ ; CC =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

A2 = A.A;
A3 = A.A.A;
A4 = A.A.A.A;
A5 = A.A.A.A.A;

In[28]:= Q = Join[B, A.B, A2.B, A3.B, A4.B, A5.B, 2]; MatrixRank[Q]

Out[28]= 6

In[29]:= P = Join[CC, CC.A, CC.A2, CC.A3, CC.A4, CC.A5]; MatrixRank[P]

Out[29]= 6

```

Figura 1.7: Instrucciones en Wolfram Mathematica para el cálculo del rango de las matrices P y Q .

El subsistema [Rotores]

La descripción de la programación del modelo del TRMS en Simulink puede iniciarse por los rotores, pues éstos poseen las variables de entrada del sistema, en Fig. 1.8(b) se muestra la implementación de las dos ecuaciones diferenciales $\dot{x}_5$, $\dot{x}_6$ que modelan los rotores del TRMS; observe que la entrada es un vector $v = [v_m \ v_t]^T$ cuyas componentes son los voltajes en las terminales del rotor principal y de cola y la salida es un vector $w = [w_1 = |\omega_m|\omega_m \ w_2 = |\omega_t|\omega_t]^T$ cuyas componentes son el signo por el cuadrado de la velocidad angular de los rotores principal y de cola respectivamente. Los parámetros d_m , b_m , a_m , d_t , b_t , a_t se etiquetan como **dm**, **bm**, **am**, **dt**, **bt**, **at** respectivamente.

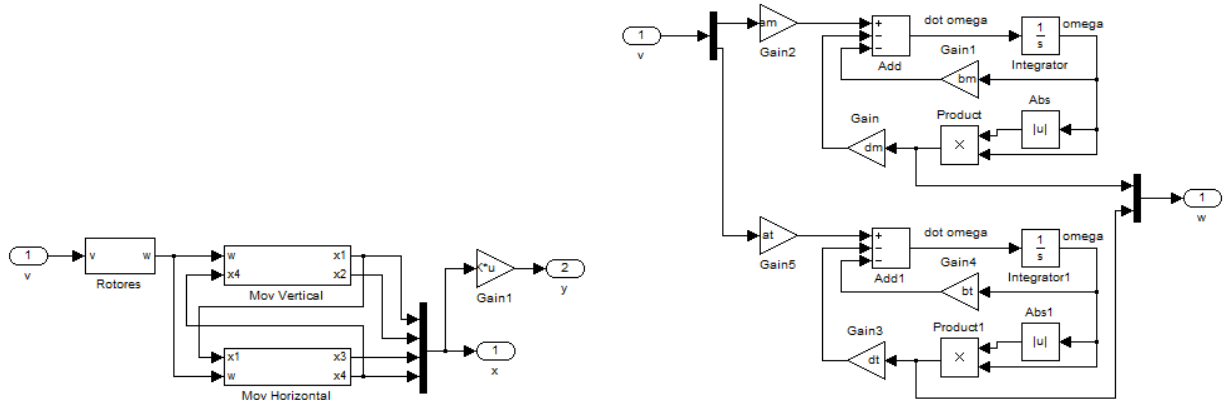
El subsistema [MovVertical]

Otra parte fácilmente notable en el modelo del TRMS son la dinámica en el plano vertical; esto es modelado por las ecuaciones diferenciales $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. En Fig. 1.8(c) se muestra la implementación de estas ecuaciones diferenciales. Observe que la entrada es el vector $w = [w_1 = |\omega_m|\omega_m \ w_2 = |\omega_t|\omega_t]^T$ y el estado x_4 (la velocidad angular en el plano horizontal) y las salidas son los estados x_1 y x_2 . Los parámetros η_i , $i = 1, 8$ se etiquetan como **e1**, **e2**, ..., **e8**.

El subsistema [MovHorizontal]

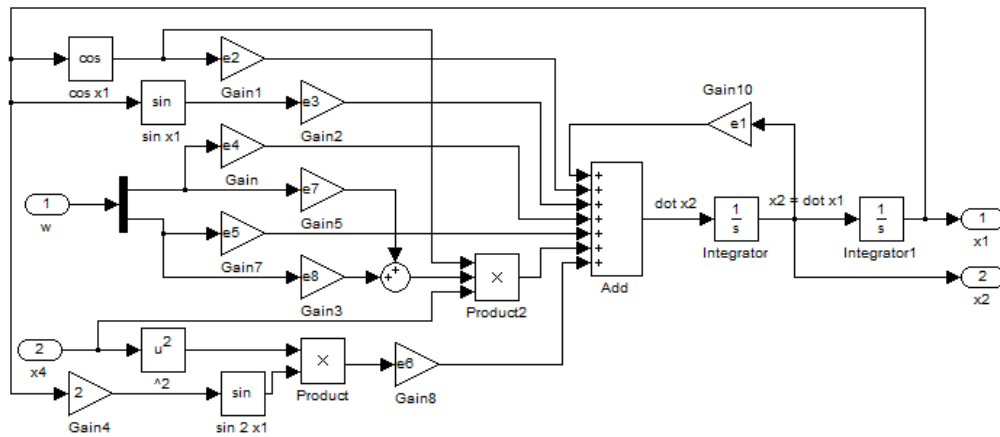
Finalmente se implementa la dinámica del movimiento en el plano horizontal del TRMS, ésta es modelado por las ecuaciones diferenciales $\dot{x}_3$, $\dot{x}_4$. En Fig. 1.8(d) se muestra la implementación de estas ecuaciones diferenciales. Observe que la entrada es el vector $w = [w_1 = |\omega_m|\omega_m \ w_2 = |\omega_t|\omega_t]^T$ y el estado x_1 (la posición angular en el plano vertical) y las salidas son los estados x_3 y x_4 . Los parámetros ρ_i , $i = 1, 7$ se etiquetan como **r1**, **r2**, ..., **r7**.

La implementación final es la que se muestra en Fig. 1.8(a). La entrada es el vector $v = [v_m \ v_t]$ y las salidas son el vector de estados completo x o los estados medibles $y = Cx$.

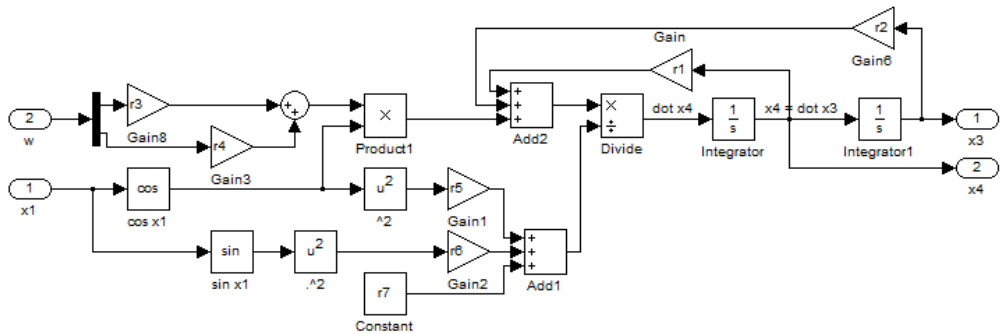


(a) Implementación computacional del modelo del TRMS (1.46) en lenguaje Simulink.

(b) Diagrama de bloques de subsistema [Rotores].



(c) Diagrama de bloques de subsistema [MovVertical].



(d) Diagrama de bloques de subsistema [MovHorizontal].

Figura 1.8: Diagrama de bloques del modelo del TRMS en Matlab-Simulink.

Estimación de parámetros

A partir de que el universo es el más perfecto trabajo de un sabio creador, nada en absoluto tiene lugar en él sin alguna regla de máximos o mínimos.

Leonhard Euler.

LA identificación de sistemas tiene diversos significados en la literatura científica; la definición más aceptada se refiere a la identificación, o *modelado de un sistema*, como el proceso de determinar un conjunto de ecuaciones diferenciales o en diferencias, o los parámetros de tales ecuaciones, que describen un proceso físico de acuerdo con un determinado criterio [24].

Este capítulo inicia con una descripción del proceso de identificación de sistemas; posteriormente se estudian los algoritmos de estimación de parámetros por mínimos cuadrados ya que son algoritmos importantes tanto para el proceso de identificación como para el control adaptativo que se verá en el capítulo siguiente. Al final se aplican los algoritmos estudiados para estimar los parámetros del TRMS.

2.1. El proceso de identificación de sistemas

En la literatura [21, 19] podemos encontrar que la identificación de sistemas permite construir modelos matemáticos de un sistema dinámico basándose en datos medidos. Esto se realiza por una serie de pasos que en general se repiten hasta lograr un modelo matemático cuya salida coincida lo mejor posible al conjunto de datos experimentales. En Fig. 2.1 se presenta de manera gráfica los pasos que se realizan en el proceso de identificación de sistemas y los posibles lazos de iteración.

2.1.1. Conocimientos previos sobre la planta

Primeramente, se determina el objetivo final del modelo lo cual es la base sobre la cual se tomarán decisiones en los pasos sucesivos; los objetivos mas comunes son: verificación de modelos teóricos, sintonía

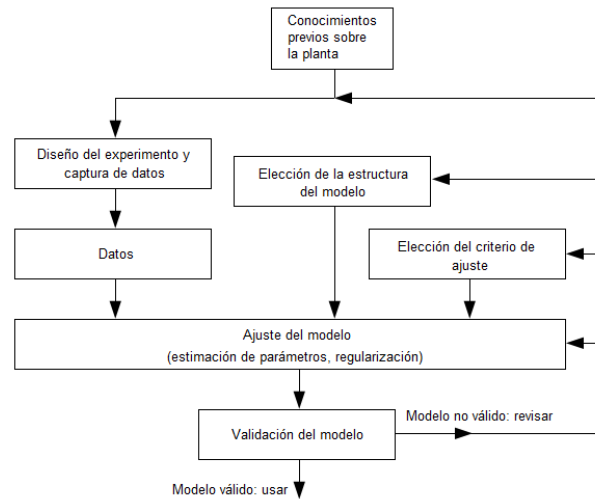


Figura 2.1: El proceso de identificación de sistemas.

de controladores, base para el diseño de controladores, supervisión y detección de fallos, predicción, procesamiento de señales, simulación, etc.

Una vez que se ha definido el objetivo de la identificación del sistema se recurre a recopilar toda la información útil que sea posible sobre la planta; entre esta información pueden figurar: principios físicos, algunos parámetros físicos, curvas de transición, rangos de operación, condiciones del entorno, accesibilidad y medición, etc., todo esto que nos permita tomar decisiones acertadas en los pasos posteriores.

Finalmente, dependiente del tipo de aplicación, se decide entre métodos de identificación:

1. fuera de línea (off-line), en donde no se requiere un ajuste continuo del modelo debido a que se supone que los parámetros del sistema son constantes,
2. en línea (on-line), en donde se requiere un ajuste continuo del modelo debido generalmente a que los parámetros van cambiando con el tiempo.

2.1.2. Diseño del experimento y captura de datos

En general, se considera que los datos necesarios son los mínimos posibles ya que la realización de experimentos puede ser muy costoso (económicamente, computacionalmente, etc.); en esta etapa se determinan, entre otras cosas:

- el tipo de señales de excitación; donde se busca por lo general excitar todos los *modos* del sistema con una señal de excitación con contenido frecuencial suficiente,
- el mejor periodo para la adquisición de datos, donde se atiende principalmente el criterio de Nyquist,
- la cantidad de datos necesarios; que está en función del intervalo de tiempo de observación del sistema y se relaciona con el grado de fidelidad que se desea del modelo.

Por lo general, antes de utilizar los datos capturados, se realiza un proceso de filtrado con la finalidad de eliminar principalmente:

- datos erróneos; que no corresponden al conjunto de datos reproducibles por el sistema o que no tienen correlación con el resto de los datos y que pudieron haber sido capturados por fallas en los instrumentos de medición,
- altas frecuencias; donde las componentes de alta frecuencia se asocian por lo general a ruido en el proceso o en la medición,
- offsets; que son la suma de alguna componente estática y puede ser originada por una calibración deficiente de los instrumentos de medición,
- derivas; que son datos que no convergen a un punto estacionario cuando deberían hacerlo y cuyo origen puede atribuirse a la integración de una señal ruidosa o a una señal con una frecuencia baja dominante.

2.1.3. Elección de la estructura del modelo

La estructura del modelo se deriva por lo general por información a priori. En esta etapa se decide sobre un modelo no paramétrico (como el análisis de la respuesta transitoria, análisis de correlación, análisis frecuencial, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.) o paramétrico; en caso de éste último por lo general se aplican principios físicos que gobiernan al sistema. Otros aspectos que se consideran sobre el modelo son:

- continuo o discreto,
- lineal o no lineal,
- modelado del ruido,
- regresiones,
- redes neuronales, etc.

2.1.4. Elección del criterio de ajuste y ajuste del modelo

El criterio es una medida de que tan bien representa el modelo a los datos experimentales. La forma más común del criterio para el caso discreto es

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N g(\varepsilon(k)), \quad (2.1)$$

donde $\varepsilon(k)$ es una medida del error y $g(\cdot)$ una función no negativa. Particularmente, la función $g(\cdot)$ se elige como una norma ℓ_p y cuando $p = 2$ el criterio (2.1) es el funcional de mínimos cuadrados. Ocasionalmente se emplea la norma ℓ_1 como criterio para la “estimación robusta” debido a que penaliza en menor medida en comparación con la norma ℓ_2 a los datos sin correlación; sin embargo la convergencia al mínimo es más lenta respecto al criterio con norma ℓ_2 . Finalmente, con el criterio elegido se determina el algoritmo para procesar datos experimentales y obtener los parámetros óptimos. En este trabajo se aplica el criterio de mínimos cuadrados [24, 23, 14, 35, 36], que es el más estudiado y utilizado en la práctica como parte fundamental de los sistemas de control adaptativo [35, 1, 24].

2.1.5. Validación del modelo

Cuando un modelo ha sido obtenido de datos experimentales, es necesario revisarlo para averiguar sus puntos débiles. Por ello es conveniente obtener su respuesta a una entrada de excitación adecuada y bajo algún criterio (como polos y ceros, errores de predicción, análisis de residuos, etc.) determinar la calidad con la que el modelo representa el proceso estudiado. Algunas de las técnicas más usadas para la validación de modelos son:

1. media cuadrática de residuos,
2. autocorrelación de residuos,
3. correlación cruzada entre residuos y entrada,
4. viabilidad respecto a los parámetros físicos,
5. reducción del modelo,
6. comparación directa.

La técnica más empleada para validar el modelo es por análisis de residuos; en este contexto, los residuos son definidos como las diferencias entre la salida del sistema y la salida calculada con el modelo identificado:

$$\varepsilon(k, \Theta) = y(k) - y(k, \Theta), \quad (2.2)$$

donde $\varepsilon(k, \Theta)$ son los residuos, $y(k)$ la salida del sistema y $y(k, \Theta)$ la salida del modelo identificado.

Media cuadrática de residuos. Con esta técnica se mide el promedio del cuadrado de los residuos, matemáticamente se define como:

$$\vartheta_M = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \Theta), \quad (2.3)$$

donde N es el número total de datos procesados y $\vartheta_M \in \mathbb{R}_0^+$ indica la exactitud de la forma en que el modelo identificado reproduce la respuesta del sistema.

Autocorrelación de residuos. Dado que se asume que un modelo bien condicionado arroja una secuencia de residuos similar a ruido blanco, una buena forma de verificar esta condición es aplicar un chequeo por autocorrelación:

$$\vartheta_A(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k, \Theta) \varepsilon(k - \tau k, \Theta), \quad \tau = 1, 2, 3 \dots \quad (2.4)$$

donde si $\vartheta_A(\tau)$ no da valores pequeños para $\tau \neq 0$ indica deficiencia en la estimación de los parámetros del modelo.

Correlación cruzada entre residuos y entrada. De forma similar, los residuos no deben estar correlacionados con la entrada, por lo cual se propone aplicar una correlación curada de los residuos de la salida con la entrada del sistema:

$$\vartheta_C(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k, \Theta) u(k) \varepsilon(k - \tau k, \Theta), \quad \tau = 1, 2, 3 \dots \quad (2.5)$$

donde si se detectan trazas de entradas pasadas en los residuos, entonces una parte de la salida está asociada con valores pasados de la entrada, lo cual es indicativo que el modelo puede mejorarse.

2.2. Estimación de parámetros como un problema de optimización

Definición 1 (Problema general de optimización). Sea X un espacio vectorial real, sea $S \subset X$ un conjunto (no necesariamente un subespacio), y una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$; el problema de hallar $\bar{x} \in S$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in S,$$

se dice problema general de optimización y se denota como:

$$\min_{x \in S} f(x),$$

donde la solución $\bar{x}$ se le denomina *mínimo global* de f sobre S . Pueden distinguirse las siguientes características:

- La dimensión del espacio vectorial X es la *dimensión del problema*.
- $S = X$, el problema se dice *sin restricciones*.
- $S \subset X$, el problema se dice *con restricciones*. ♣

Por convención se habla de *minimizar* y no de maximizar una función objetivo o funcional f . Claramente puede verse que *maximizar* a f puede formularse como minimizar $-f$.

Definición 2 (Mínimo local y global). Un punto $\bar{x}$ es un *mínimo local* de f si existe $r > 0$ tal que:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x : \|x - \bar{x}\| \leq r.$$

El *mínimo global* de f será el mínimo local de menor valor de la función objetivo. ♣

Encontrar el mínimo global de una función *no lineal* cualquiera es un problema abierto en matemáticas. Los métodos existentes no pueden más que garantizar la convergencia a mínimos locales.

Teorema 1: Un punto $\bar{x}$ es un mínimo local de f si se verifican las siguientes condiciones:

1. $\bar{x}$ es un punto estacionario de f , es decir $\nabla f(\bar{x}) = 0$.
2. La matriz hessiana en $\bar{x}$ es definida positiva.

.



2.3. Estimación de parámetros para modelos lineales

La estimación de parámetros se puede formular como un problema de optimización en el que el mejor modelo es aquel que mejor se ajusta a los datos de acuerdo con un criterio dado. Para *modelos lineales respecto a los parámetros* la estimación de parámetros considera los siguientes modelos:

$$y = \varphi\Theta + w, \tag{2.6a}$$

$$\hat{y} = \varphi\hat{\Theta}, \tag{2.6b}$$

donde

- $y, \hat{y} \in \mathbb{R}$ es la variable de *observación* o de salida del sistema y la salida del modelo simplificado respectivamente,
- $\Theta, \hat{\Theta} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de parámetros reales y estimados respectivamente,
- $w \in \mathbb{R}$ es un término de ruido, incertidumbres, dinámicas no modeladas, etc.,
- $\varphi \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es el vector de *mediciones* o funciones de mediciones, que pueden depender de otras variables,
- los pares *medición y observación* (φ_k, y_k) se conocen como *experimento*.

Si el sistema puede ser representado por la ecuación (2.6a) y deseamos ajustar el modelo simplificado (2.6b), la tarea de estimación de parámetros consiste en buscar los parámetros $\hat{\Theta}$ tales que sean la solución del problema de optimización para algún criterio. La solución optimal del problema de estimación depende, de como se formule el problema. Hay muchas posibilidades de combinar condiciones experimentales, modelos y criterios. Matemáticamente, el problema de estimación de parámetros puede expresarse como:

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} J(\Theta), \quad (2.7)$$

donde $J(\Theta)$ es un funcional elegido como el criterio de optimización.

De lo anterior, se puede concluir que, para resolver el problema de estimación de parámetros se requiere lo siguiente:

1. Datos de entrada-salida del proceso.
2. Un modelo.
3. Un criterio.

2.3.1. Criterio de mínimos cuadrados

Cuando se formula un problema de identificación se introduce un criterio para tener una medida de hasta que punto un modelo se ajusta a los datos experimentales. Particularmente, un criterio de optimización se puede formular como función del error:

$$J(\theta) = g(e); \quad e = y - \hat{y} = y - \varphi\hat{\theta}, \quad (2.8)$$

Gauss formuló el problema de identificación como un problema de optimización e introdujo el principio de los mínimos cuadrados, este método define a $g(e)$ como

$$g(e) = \sum_{i=0}^n \left(y_i - \varphi_i \hat{\theta}_i \right)^2. \quad (2.9)$$

2.3.2. Algoritmo de estimación por mínimos cuadrados para parámetros constantes

En esta sección se presenta el caso particular de estimación de parámetros cuando éstos son constantes y son representados como $\Theta \in \mathbb{R}^n$. Como el modelo que se considera es lineal y el funcional de mínimos cuadrados es convexo, entonces los parámetros solución $\hat{\Theta}$ es un mínimo y es único. Para la solución de

éste problema, son necesarios al menos N mediciones linealmente independientes como se verá mas adelante; sin embargo, en el k -ésimo experimento se puede resolver el problema con los k experimentos disponibles y así tener una sucesión $\{\hat{\Theta}_k\}$ que converge a $\hat{\Theta}_N$. En otras palabras, para $\Theta \in \mathbb{R}^n$, existe y es única la solución $\hat{\Theta}_N$ que es próxima a Θ (en el sentido de mínimos cuadrados) y la cual se puede hallar por una sucesión $\{\hat{\Theta}_k\}$ que converge a $\hat{\Theta}_N$ como se expresa a continuación:

$$\{\hat{\Theta}_k\} \rightarrow \hat{\Theta}_N \rightarrow \hat{\Theta}. \quad (2.10)$$

El método de mínimos cuadrados puede ser aplicado a una gran variedad de problemas y es particularmente simple para modelos que pueden ser escritos como un modelo lineal respecto a los parámetros como en las ecuaciones (2.6); considerando que solo es posible realizar mediciones experimentales en instantes específicos se considera la versión discreta de (2.6) como

$$\begin{aligned} y(k) &= \varphi(k)\Theta + w(k), \\ \hat{y}(k) &= \varphi(k)\hat{\Theta}(k-1), \\ e(k) &= y(k) - \hat{y}(k). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por comodidad, se realiza un cambio de notación donde la variable independiente t de alguna función $\xi(t)$ se discretiza con periodo T adecuado según el criterio de Nyquist (periodo no necesariamente constante) como $k = t_0 + iT$, $i = 0, 1, \dots$ y se indica como sub-índice, es decir $\xi_k := \xi(k)$. Por lo tanto, las ecuaciones anteriores se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} y_k &= \varphi_k\Theta + w_k, \\ \hat{y}_k &= \varphi_k\hat{\Theta}_{k-1}, \\ e_k &= y_k - \hat{y}_k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde φ_i es un vector fila conocido como *variable de regresión* o *regresor* y Θ_i , $\hat{\Theta}_i$ son vectores columna cuyas componentes son los parámetros del sistema y del modelo respectivamente:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= [\phi_{k1} \ \phi_{k2} \ \dots \ \phi_{kn}] , \\ \Theta &= [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T , \\ \hat{\Theta}_k &= [\hat{\theta}_{k1} \ \hat{\theta}_{k2} \ \dots \ \hat{\theta}_{kn}]^T . \end{aligned}$$

Desde esta perspectiva, el problema es: dados N experimentos, determinar los parámetros $\hat{\Theta}_N$ de tal manera que las salidas calculadas $\hat{y}_i$, $i = \overline{1, N}$ se acerquen tanto como sea posible a las variables y_i , $i = \overline{1, N}$. Ya que la variable medida y es lineal respecto a los parámetros Θ y el criterio de mínimos cuadrados es cuadrático, el problema admite una solución analítica. Introduciendo la notación:

$$\begin{aligned} Y_k &:= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k]^T , \\ \Phi_k &:= [\varphi_1^T \ \varphi_2^T \ \dots \ \varphi_k^T]^T , \\ E_k &:= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_k]^T = Y_k - \hat{Y}_k = Y_k - \Phi_k\hat{\Theta}_{k-1}, \\ e_i &:= y_i - \hat{y}_i = y_i - \varphi_i\hat{\Theta}_{i-1}, \end{aligned}$$

y considerando el funcional:

$$J(\hat{\Theta}) := \sum_{i=1}^k e_i^2 = \sum_{i=1}^k \left(y_i - \varphi_i\hat{\Theta}_{i-1} \right)^2 = E^T E = \|E\|^2, \quad (2.13)$$

el problema de estimación se soluciona encontrado el argumento que minimiza el funcional (2.13) y está dado por el siguiente teorema.

Teorema 2 (Estimación por mínimos cuadrados): *El funcional (2.13) es mínimo para los parámetros $\hat{\Theta}$ tales que:*

$$\Phi^T \Phi \hat{\Theta} = \Phi^T Y. \quad (2.14)$$

Si la matriz $\Phi^T \Phi$ es no singular, entonces el mínimo es único y está dado por:

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y; \quad \det(\Phi^T \Phi) \neq 0. \quad (2.15)$$

◆

DEMOSTRACIÓN Sea el funcional

$$J(\hat{\Theta}) = [Y - \Phi \hat{\Theta}]^T [Y - \Phi \hat{\Theta}] = [Y^T - \hat{\Theta}^T \Phi^T] [Y - \Phi \hat{\Theta}] = Y^T Y - Y^T \Phi \hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T \Phi^T Y + \hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta}.$$

Ya que $Y^T \Phi \hat{\Theta}, \hat{\Theta}^T \Phi^T Y \in \Re$ e $Y^T \Phi \hat{\Theta} = [\hat{\Theta}^T \Phi^T Y]^T$, entonces $Y^T \Phi \hat{\Theta} = \hat{\Theta}^T \Phi^T Y$. El funcional $J(\hat{\Theta})$ se reduce a:

$$J(\hat{\Theta}) = Y^T Y + \hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta} - 2\hat{\Theta}^T \Phi^T Y. \quad (2.16)$$

Para minimizar el funcional $J(\hat{\Theta})$ derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\Theta}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} (\hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta}) - 2 \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} (\hat{\Theta}^T \Phi^T Y) = \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} (\hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta}) - 2 \frac{\partial \hat{\Theta}^T}{\partial \hat{\Theta}} (\Phi^T Y) = 0. \quad (2.17)$$

Para el segundo término del lado derecho de (2.17) se tiene:

$$\frac{\partial \hat{\Theta}^T}{\partial \hat{\Theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_n} \end{bmatrix} [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \dots \quad \hat{\theta}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}. \quad (2.18)$$

Para simplificar el análisis del primer término del lado derecho de (2.17), se definen $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ como:

$$\mathbb{A} := \Phi^T \Phi; \quad \mathbb{B} := \hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta} = \hat{\Theta}^T \mathbb{A} \hat{\Theta} \in \Re, \quad (2.19)$$

donde se observa que $\mathbb{A}$ es simétrica. Por otro lado, el gradiente de $\mathbb{B}$ es:

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\Theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_1} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}_n} \end{bmatrix} \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\theta}_1} \\ \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\theta}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\theta}_n} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

donde la i -ésima componente es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\theta}_i} &= \frac{\partial \hat{\Theta}^T}{\partial \hat{\theta}_i} \mathbb{A} \hat{\Theta} + \hat{\Theta}^T \mathbb{A} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \hat{\theta}_i} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = \\
 & (a_{i1} + a_{1i})\hat{\theta}_1 + (a_{i2} + a_{2i})\hat{\theta}_2 + \cdots + (a_{in} + a_{ni})\hat{\theta}_n = \\
 & \begin{bmatrix} (a_{i1} + a_{1i}) & (a_{i2} + a_{2i}) & \cdots & (a_{in} + a_{ni}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix}, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

y ya que $\mathbb{A}$ es simétrica, entonces:

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\theta}_i} = 2 \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

por lo que (2.17) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \hat{\Theta}} &= \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} \\ \vdots \\ 2 \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{bmatrix} = \\
 & 2\mathbb{A}\hat{\Theta} = 2\Phi^T\Phi\hat{\Theta} = \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} \left(\hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta} \right), \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

con lo que (2.17) se reduce a:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\Theta}} = 2\Phi^T\Phi\hat{\Theta} - 2\Phi^TY = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^T\Phi\hat{\Theta} = \Phi^TY, \quad (2.24)$$

y si $\Phi^T \Phi$ es no singular, entonces: $\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$. ■

Algoritmo recursivo de estimación por mínimos cuadrados

Ahora partiendo del algoritmo (2.15), es posible deducir un algoritmo recursivo que permita calcular para cada iteración una nueva estimación aprovechando las estimaciones previas. Consideremos primero la siguiente notación:

$$\begin{aligned} Y_{k-1} &= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{k-1}]^T, \\ \Phi_{k-1} &= [\varphi_1^T \ \varphi_2^T \ \dots \ \varphi_{k-1}^T]^T, \\ \hat{\Theta}_{k-1} &= [\hat{\theta}_1(k-1) \ \hat{\theta}_2(k-1) \ \dots \ \hat{\theta}_n(k-1)]^T, \\ \varphi_{k-1} &= [\phi_1(k-1) \ \phi_2(k-1) \ \dots \ \phi_n(k-1)], \\ D_{k-1} &= \Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1}, \\ Z_{k-1} &= \Phi_{k-1}^T Y_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Con esta notación (2.15) puede escribirse como $\hat{\Theta}_{k-1} = D_{k-1}^{-1} Z_{k-1}$ y para $\hat{\Theta}_k$ se tiene:

$$D_k = \Phi_k^T \Phi_k = D_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k = [\Phi_{k-1}^T \ \varphi_k^T] \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k. \tag{2.26a}$$

$$Z_k = \Phi_k^T Y_k = Z_{k-1} + \varphi_k^T y_k = [\Phi_{k-1}^T \ \varphi_k^T] \begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} = \Phi_{k-1}^T Y_{k-1} + \varphi_k^T y_k. \tag{2.26b}$$

Y para el vector de parámetros en el instante k tenemos:

$$\hat{\Theta}_k = D_k^{-1} \{Z_{k-1} + \varphi_k^T y_k\} = D_k^{-1} \{D_{k-1} \hat{\Theta}_{k-1} + \varphi_k^T y_k\}, \tag{2.27}$$

puesto que $\hat{\Theta} = D^{-1} Z \implies Z = D \hat{\Theta}$, y por (2.26a) $D_{k-1} = D_k - \varphi_k^T \varphi_k$, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_k &= D_k^{-1} \{[D_k - \varphi_k^T \varphi_k] \hat{\Theta}_{k-1} + \varphi_k^T y_k\} = \hat{\Theta}_{k-1} - D_k^{-1} \varphi_k^T \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1} + D_k^{-1} \varphi_k^T y_k \\ &= \hat{\Theta}_{k-1} + D_k^{-1} \varphi_k^T \{y_k - \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1}\}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Usando (2.12), se obtiene:

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + D_k^{-1} \varphi_k^T \{y_k - \hat{y}_k\} = \hat{\Theta}_{k-1} + D_k^{-1} \varphi_k^T e_k. \tag{2.29}$$

Al renombrar $D^{-1} = P$, entonces:

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= [\Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1}]^{-1} = D_{k-1}^{-1}, \\ P_k &= [\Phi_{k-1}^T \Phi_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k]^{-1} = [D_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k]^{-1} = D_k^{-1}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para resolver la matriz P_k , se hace uso del siguiente lema.

Lema 1 (Matriz de inversión): Sea A , C y $[C^{-1} + DA^{-1}B]$ matrices cuadradas no singulares, entonces:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1} DA^{-1}. \tag{2.31}$$



DEMOSTRACIÓN Multiplicando por la izquierda por $A + BCD$

$$\mathbb{I} = [A + BCD]A^{-1} - [A + BCD]A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1},$$

simplificando

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \mathbb{I} + BCDA^{-1} - [A + BCD]A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}, \\ \mathbb{O} &= BCDA^{-1} - [A + BCD]A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}, \\ BCDA^{-1} &= [A + BCD]A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}, \\ BC &= [A + BCD]A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1},\end{aligned}$$

multiplicando por la derecha por $C^{-1} + DA^{-1}B$ y simplificando

$$\begin{aligned}BC[C^{-1} + DA^{-1}B] &= [A + BCD]A^{-1}B, \\ B + BCDA^{-1}B &= B + BCDA^{-1}B.\end{aligned}$$

■

Haciendo $A = D_{k-1}$, $B = \varphi_k^T$, $C = 1$, $D = \varphi_k$ y aplicando el lema 1 en (2.30), se tiene:

$$\begin{aligned}P_k &= [D_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k]^{-1} = D_{k-1}^{-1} - D_{k-1}^{-1} \varphi_k^T [1 + \varphi_k D_{k-1}^{-1} \varphi_k^T]^{-1} \varphi_k D_{k-1}^{-1} \\ &= P_{k-1} - P_{k-1} \varphi_k^T [1 + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T]^{-1} \varphi_k P_{k-1}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Definiendo:

$$\gamma_k := 1 + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T, \quad (2.33)$$

$$K_k := \frac{P_{k-1} \varphi_k^T}{1 + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T} = \frac{1}{\gamma_k} P_{k-1} \varphi_k^T, \quad (2.34)$$

entonces:

$$P_k = P_{k-1} - K_k \varphi_k P_{k-1}. \quad (2.35)$$

La ecuación (2.29) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_k &= \hat{\Theta}_{k-1} + D_{k-1}^{-1} \varphi_k^T e_k = \hat{\Theta}_{k-1} + P_{k-1} \varphi_k^T e_k = \hat{\Theta}_{k-1} + \left\{ P_{k-1} - \frac{1}{\gamma_k} P_{k-1} \varphi_k^T \varphi_k P_{k-1} \right\} \varphi_k^T e_k = \\ &= \hat{\Theta}_{k-1} + P_{k-1} \varphi_k^T e_k - \frac{1}{\gamma_k} P_{k-1} \varphi_k^T \underbrace{\varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T}_{\gamma_k - 1} e_k = \hat{\Theta}_{k-1} + P_{k-1} \varphi_k^T e_k - P_{k-1} \varphi_k^T e_k + \frac{1}{\gamma_k} P_{k-1} \varphi_k^T e_k = \\ &= \hat{\Theta}_{k-1} + \frac{1}{\gamma_k} P_{k-1} \varphi_k^T e_k = \hat{\Theta}_k + K_k e_k,\end{aligned}\quad (2.36)$$

donde (2.36) muestra que no es necesaria la matriz P_k , sino que es suficiente con la matriz P_{k-1} . El vector K es conocido como *ganancias de Kalman*, P es la *matriz de covarianza* y e es el error de predicción (el error de estimación se define como $e_\Theta := \Theta - \hat{\Theta}$).

En el algoritmo 1 se resume esta técnica que al ser recursiva requiere de valores iniciales. A falta de mejor información, puede inicializarse $\Theta_0 = 0$ y P_0 alguna matriz simétrica y definida positiva. Típicamente $P_0 = \sigma \mathbb{I}$ con σ igual a algún valor alto (comúnmente entre 10^3 y 10^6) conscientes de que un valor muy bajo de σ significará una convergencia demasiado lenta hacia Θ y un valor muy alto de σ puede conducir a problemas de inestabilidad numérica.

Algorithm 1: Estimación recursiva por mínimos cuadrados.

Data: $\hat{\Theta}_{k-1}, P_{k-1}, y_k, \varphi_k$.

Result: $\hat{\Theta}_k, P_k$.

- 1 $K_k = \frac{P_{k-1} \varphi_k^T}{1 + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T};$
 - 2 $P_k = P_{k-1} - K_k \varphi_k P_{k-1};$
 - 3 $e_k = y_k - \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1};$
 - 4 $\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + K_k e_k;$
 - 5 **return** $\hat{\Theta}_k, P_k$.
-

2.3.3. Algoritmo de estimación por mínimos cuadrados para parámetros variables

En esta sección se presenta el caso mas general de estimación de parámetros y es cuando éstos no son constantes. Ahora se puede pensar que en un instante inicial $k = k_0$ los parámetros del sistema son Θ^0 y considerando que en el intervalo $[k_0 \leq k \leq k_1]$ el vector Θ^0 se mantiene constante, como en el caso de la sección anterior, existe $\hat{\Theta}_{N_0}^0$ que es próxima a Θ^0 (en el sentido de mínimos cuadrados) y se puede hallar por una sucesión $\{\hat{\Theta}_k^0\}$ que converge a $\hat{\Theta}_{N_0}^0$. De forma similar, para el intervalo $[k_1 \leq k \leq k_2]$ el sistema presenta los parámetros Θ^1 que pueden ser aproximados por $\hat{\Theta}_{N_1}^1$ con la sucesión $\{\hat{\Theta}_k^1\}$, éste análisis se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 \{\hat{\Theta}_k^0\} &\rightarrow \hat{\Theta}_{N_0}^0 \rightarrow \Theta^0, & k_0 \leq k \leq k_1; \\
 \{\hat{\Theta}_k^1\} &\rightarrow \hat{\Theta}_{N_1}^1 \rightarrow \Theta^1, & k_1 \leq k \leq k_2; \\
 &\vdots & \\
 \{\hat{\Theta}_k^m\} &\rightarrow \hat{\Theta}_{N_m}^m \rightarrow \Theta^m, & k_m \leq k \leq k_{m+1}; \\
 &\vdots &
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Con referencia a las expresiones anteriores, puede verse que, en el caso más general, $\Theta^0 \neq \Theta^1 \neq \dots \neq \Theta^m \neq \dots$; por lo que se puede concluir que la sucesión $\{\hat{\Theta}_k^0\}$ no es de utilidad para converger a $\hat{\Theta}_{N_1}^1$ puesto que los experimentos procesados entre $k_0 \leq k \leq k_1$ no incluyen información alguna respecto a $\hat{\Theta}_{N_1}^1$ y así sucesivamente. En otras palabras, sólo los experimentos realizados entre $k_m \leq k \leq k_{m+1}$ aportan información para que $\{\hat{\Theta}_k^m\} \rightarrow \hat{\Theta}_{N_m}^m \rightarrow \Theta^m$. De lo anterior, surge la necesidad de *discriminar* de alguna forma los datos que la sucesión $\{\hat{\Theta}_k^m\}$ tiene sobre las sucesiones $\{\hat{\Theta}_k^{m-1}\}, \dots, \{\hat{\Theta}_k^0\}$. En otras palabras, es necesario ponderar las experimentos de forma que tengan más peso estos últimos sobre los mas antiguos, con lo que la sucesión $\{\hat{\Theta}_k^m\}$ lograr el seguimiento de $\hat{\Theta}_{N_m}^m$.

Ésto último puede interpretarse como un estimador de $\hat{\Theta}_{N_m}^m$ con *memoria finita* de experimentos; en contraste, el estimador presentado en la sección anterior posee *memoria infinita* pues la totalidad de experimentos son considerados con el mismo peso para estimar Θ .

Lo anteriormente mencionado puede aceptarse si se considera que los parámetros del sistema varían lentamente, que se cumple para los sistemas dinámicos que se considera en este trabajo, generalmente debido a derivas, desgaste o fatiga, cambios de condiciones externas o porque el sistema sea no lineal. Para lograr

un algoritmo con las características mencionadas, se define el funcional:

$$J(\hat{\Theta}, \lambda) := \lambda^N e_0^2 + \lambda^{N-1} e_1^2 + \cdots + e_N^2 = \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} e_k^2 = \sum_{k=0}^N \lambda^{N-k} \left(y_k - \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1} \right)^2 = E^T Q E, \quad (2.38)$$

donde Q es la matriz que pesa los errores, dando menor y mayor importancia a los antiguos y recientes errores respectivamente y está definida como

$$Q := \text{diag} [\lambda^N, \lambda^{N-1}, \dots, \lambda^0], \quad (2.39)$$

donde $\lambda \in (0, 1]$. El problema de estimación con factor de olvido se soluciona encontrando el argumento que minimiza el funcional (2.38) y está dado por el siguiente teorema.

Teorema 3 (Estimación por mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial): *El funcional (2.38) es mínimo para los parámetros $\hat{\Theta}$ tales que:*

$$\Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} = \Phi^T Q Y. \quad (2.40)$$

Si la matriz $\Phi^T Q \Phi$ es no singular, entonces el mínimo es único y está dado por:

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y; \quad \det(\Phi^T Q \Phi) \neq 0. \quad (2.41)$$

DEMOSTRACIÓN Sea

$$\begin{aligned} J(\hat{\Theta}, \lambda) &= [Y - \Phi \hat{\Theta}]^T Q [Y - \Phi \hat{\Theta}] = [Y^T - \hat{\Theta}^T \Phi^T] Q [Y - \Phi \hat{\Theta}] = \\ &= Y^T Q Y - Y^T Q \Phi \hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T \Phi^T Q Y + \hat{\Theta}^T \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ya que $Y^T Q \Phi \hat{\Theta}$, $\hat{\Theta}^T \Phi^T Q Y \in \mathbb{R}$, Q es simétrica y $[Y^T Q \Phi \hat{\Theta}]^T = \hat{\Theta}^T \Phi^T Q^T Y$, entonces $Y^T Q \Phi \hat{\Theta} = \hat{\Theta}^T \Phi^T Q Y$; por lo que:

$$J(\hat{\Theta}, \lambda) = Y^T Q Y + \hat{\Theta}^T \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} - 2 \hat{\Theta}^T \Phi^T Q Y, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\Theta}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} \left(\hat{\Theta}^T \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} \right) - 2 \frac{\partial \hat{\Theta}^T}{\partial \hat{\Theta}} (\Phi^T Q Y) = 0. \quad (2.44)$$

Por (2.18) se sabe que $\frac{\partial \hat{\Theta}^T}{\partial \hat{\Theta}} = \mathbb{I}$. Para simplificar el análisis del primer término del lado derecho de (2.44), se definen $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ como:

$$\mathbb{A} := \Phi^T Q \Phi, \quad \mathbb{B} := \hat{\Theta}^T \mathbb{A} \hat{\Theta} \in \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

donde $\mathbb{A}$ es simétrica, por lo que la solución del primer término del lado derecho (2.44) debe resultar igual que (2.23):

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} \left(\hat{\Theta}^T \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} \right) = 2 \mathbb{A} \hat{\Theta} = 2 \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta},$$

y finalmente (2.44) se reduce a:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\Theta}} = 2 \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} - 2 \Phi^T Q Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^T Q \Phi \hat{\Theta} = \Phi^T Q Y, \quad (2.46)$$

y si $\Phi^T Q \Phi$ es no singular, entonces $\hat{\Theta} = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q Y$. ■

Algoritmo recursivo de estimación por mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial

Ahora partiendo del resultado (2.41), es posible deducir un algoritmo recursivo que permita calcular para cada iteración una nueva estimación aprovechando las estimaciones previas. Considerando la notación (2.25) con la diferencia de una nueva definición de D y Z como:

$$\begin{aligned} D_{k-1} &= \Phi_{k-1}^T Q_{k-1} \Phi_{k-1}, \\ Z_{k-1} &= \Phi_{k-1}^T Q_{k-1} Y_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

con lo que la ecuación (2.41) puede escribirse como $\hat{\Theta}_{k-1} = D_{k-1}^{-1} Z_{k-1}$ y para $\hat{\Theta}_k$ podemos considerar:

$$\begin{aligned} D_k &= \Phi_k^T Q_k \Phi_k = \lambda D_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k, \\ Z_k &= \Phi_k^T Q_k Y_k = \lambda Z_{k-1} + \varphi_k^T y_k. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para obtener la inversa de la matriz D_k consideramos que existe otra matriz P_k cuya inversa es D_k :

$$D_k = P_k^{-1} \iff P_k = D_k^{-1}, \quad (2.49)$$

entonces:

$$D_k = P_k^{-1} = \lambda D_k + \varphi_k^T \varphi_k = \lambda P_{k-1}^{-1} + \varphi_k^T \varphi_k,$$

multiplicando por la izquierda por P_k

$$P_k P_k^{-1} = \mathbb{I} = \lambda P_k P_{k-1}^{-1} + P_k \varphi_k^T \varphi_k,$$

multiplicando por la derecha por P_{k-1}

$$P_{k-1} = \lambda P_k + P_k \varphi_k^T \varphi_k P_{k-1}, \quad (2.50)$$

multiplicando por la derecha por φ_k^T

$$\begin{aligned} P_{k-1} \varphi_k^T &= \lambda P_k \varphi_k^T + P_k \varphi_k^T \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T = P_k \varphi_k^T (\lambda + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T), \\ K_k &:= P_k \varphi_k^T = \frac{P_{k-1} \varphi_k^T}{\lambda + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T}. \end{aligned}$$

De (2.50) se tiene que:

$$P_k = \frac{1}{\lambda} \{P_{k-1} - P_k \varphi_k^T \varphi_k P_{k-1}\} = \frac{1}{\lambda} \{P_{k-1} - K_k \varphi_k P_{k-1}\} = \frac{1}{\lambda} \left\{ P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \varphi_k^T}{\lambda + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T} \varphi_k P_{k-1} \right\},$$

y para el vector de parámetros $\hat{\Theta}_{k-1} = D_{k-1}^{-1} Z_{k-1}$, para $\hat{\Theta}_k$ se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_k &= D_k^{-1} Z_k = \frac{1}{\lambda} (P_{k-1} - K_k \varphi_k P_{k-1}) (\lambda Z_{k-1} + \varphi_k^T y_k) \\ &= P_{k-1} Z_{k-1} + \frac{1}{\lambda} P_{k-1} \varphi_k^T y_k - K_k \varphi_k P_{k-1} Z_{k-1} - \frac{1}{\lambda} K_k \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T y_k \\ &= \hat{\Theta}_{k-1} + \frac{1}{\lambda} P_{k-1} \varphi_k^T y_k - K_k \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1} - \frac{1}{\lambda} K_k \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T y_k, \end{aligned}$$

sustituyendo $P_{k-1} = \lambda P_k + K_k \varphi_k P_{k-1}$ y considerando las definiciones (2.12):

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + K_k (y_k - \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1}) + \frac{1}{\lambda} K_k \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T y_k - \frac{1}{\lambda} K_k \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T y_k = \hat{\Theta}_{k-1} + K_k e_k.$$

El algoritmo 2 resume la estimación recursiva de parámetros con factor de olvido. Note que cuando $\lambda = 1$, este algoritmo coincide completamente con el algoritmo 1.

Algorithm 2: Estimación recursiva por mínimos cuadrados con factor de olvido.

Data: $\hat{\Theta}_{k-1}$, P_{k-1} , y_k , φ_k , λ .

Result: $\hat{\Theta}_k$, P_k .

- 1 $K_k = \frac{P_{k-1}\varphi_k^T}{\lambda + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T}$;
 - 2 $P_k = \frac{1}{\lambda} (P_{k-1} - K_k \varphi_k P_{k-1})$;
 - 3 $e_k = y_k - \varphi_k \hat{\Theta}_{k-1}$;
 - 4 $\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + K_k e_k$;
 - 5 **return** $\hat{\Theta}_k$, P_k .
-

2.3.4. Estimación de asíntotas de convergencia de los parámetros

De las secciones anteriores se sabe que la estimación de parámetros es una sucesión $\{\hat{\Theta}_k\}$. Si se consideran datos sin error y un modelo que representa exactamente al sistema, entonces la sucesión $\{\hat{\Theta}_k\} \rightarrow \Theta$ y asegura que, para alguna N , $\Theta_{k-1} = \Theta_k$ cuando $k > N$; sin embargo, de manera general, el modelo que se ajusta es una aproximación al sistema real y los datos que se procesan están contaminadas con ruido (errores de medición, redondeo, perturbaciones, etc.); esto significa que para cierta δ , asociada con el error de modelado e instrumentación, la sucesión $\{\hat{\Theta}_k\}$ llegará a satisfacer, para alguna N , $\|\hat{\Theta}_k - \Theta\| < \varepsilon(\delta)$ cuando $k > N$; ésto no asegura que $\{\Theta_k\}$ llegue a un estado estacionario, solo que esté acotado por ε alrededor de Θ .

Por lo anterior, es necesario determinar cuál de los elementos de la sucesión $\{\hat{\Theta}_k\}$ $k > N$ se ha de elegir como la mejor aproximación a Θ . Este problema puede resolverse aplicando nuevamente estimación recursiva de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial. Considerando $\hat{\Theta} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \cdots \ \hat{\theta}_n]^T$; definimos $\bar{\Theta} = [\bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2 \ \cdots \ \bar{\theta}_n]^T$ como la asíntota de $\hat{\Theta}$. Como en el plano (θ_i, k) , la sucesión $\{\hat{\theta}_i(k)\}$ hará convergencia a una línea recta horizontal; de manera general, la ecuación de la recta es:

$$R(k) = \Gamma k + \hat{\Theta}, \quad (2.51)$$

como la asíntota que buscamos es rectilínea horizontal, entonces $\Gamma = 0$ y la ecuación (2.51) se reduce a $R(k) = \hat{\Theta}$ que expresado como $y = \varphi \bar{\Theta}$ donde $y = \hat{\Theta}$, $\varphi = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\Theta = \bar{\Theta}$, puede ser ajustada directamente por el algoritmo 2. Más aún, como esta es una aplicación de *propósito específico* se elimina la generalidad del algoritmo 2 y se implementa el algoritmo 3 donde por comodidad en la notación, se definen los vectores:

$$\bar{I} = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T, \quad \bar{P}(k) = [p_1(k) \ p_2(k) \ \cdots \ p_n(k)]^T,$$

donde $\bar{P}(k)$ es un vector cuyas i -ésima componente es la covarianza correspondiente a la estimación de la i -ésima asíntota de $\hat{\Theta}$. De igual manera, es conveniente la definición del producto y el cociente elemento a elemento: sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces el producto elemento a elemento $x.y$ es:

$$x.y = [x_1 y_1 \ x_2 y_2 \ \cdots \ x_n y_n] = [y_1 x_1 \ y_2 x_2 \ \cdots \ y_n x_n] = y.x,$$

y el cociente elemento a elemento $x./y$ es:

$$x./y = [x_1/y_1 \ x_2/y_2 \ \cdots \ x_n/y_n] \neq [y_1/x_1 \ y_2/x_2 \ \cdots \ y_n/x_n] = y./x.$$

Los algoritmos que se han presentado en esta sección se han desarrollado con el supuesto de que los regresores son acotados; sin embargo, en algunos modelos (como el ajuste a una curva monótonamente creciente) pueden aparecer problemas relacionados con la no acotación de los regresores; en el apéndice B se describen con más detalle estos problemas y se propone una solución para la estimación de parámetros en modelos con regresores no acotados.

Algorithm 3: Estimación recursiva de asíntotas de convergencia.

Data: $\bar{\Theta}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}, \hat{\Theta}_k, \lambda$.

Result: $\bar{\Theta}_k, \bar{P}_k$.

- 1 $K_k = \bar{P}_{k-1} / (\lambda \bar{I} + \bar{P}_{k-1});$
 - 2 $\bar{P}_k = \frac{1}{\lambda} \bar{I} \cdot (\bar{I} - K_k) \cdot \bar{P}_{k-1};$
 - 3 $e_k = \hat{\Theta}_k - \bar{\Theta}_{k-1};$
 - 4 $\bar{\Theta}_k = \bar{\Theta}_{k-1} + K_k \cdot e_k;$
 - 5 **return** $\bar{\Theta}_k, \bar{P}_k$.
-

2.3.5. Criterios para la determinación del factor de olvido exponencial

El factor de olvido λ en los algoritmos presentados en las secciones anteriores se ha dejado sin mayor comentario; no se habló nada sobre un valor numérico “adecuado” que funcione para cada problema de estimación de parámetros particular; más aún, en la práctica, el valor numérico de λ es ajustado experimentalmente o es determinado por experiencia. En esta sección se proponen cuatro criterios para determinar λ de una manera más sistematizada:

1. Aproximación de primer orden,
2. Aproximación de primer orden y dos iteraciones,
3. Aproximación de primer orden y n iteraciones,
4. Aproximación de tercer orden.

El factor de olvido exponencial que se aplica en el algoritmo 2, es de la forma:

$$q(k) = \lambda^{N-k},$$

ésta curva pesa de forma exponencial los errores de predicción $y - \hat{y}$; de manera intuitiva, los errores más antiguos se van discriminando mientras se da mas importancia a los errores más recientes; en la figura 2.2 se muestra una curva característica del factor de olvido donde claramente se observa que el error registrado en el N -ésimo dato (el último dato) tiene peso unitario, mientras que el peso para el k -ésimo dato decrece exponencialmente a medida que $k \rightarrow 0$.

Intervalo de datos significativos por aproximación de primer orden

Un criterio para determinar los datos significativos para la estimación en el instante $k = N$ por aproximación de primer orden es considerar aquellos datos que se encuentren en el intervalo $k = [k_1, N]$ donde k_1 es la solución de la ecuación de la recta tangente a la curva $q(k)$ en el punto $(N, 1)$.

La curva $q(k)$ se puede expresar en serie de Taylor como:

$$q(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)}(a)}{n!} (k-a)^n,$$

y la aproximación de primer orden de $q(k)$ es:

$$q(k) \approx q(a) + \frac{dq(a)}{dk} (k-a) = \lambda^{N-a} - (k-a) \lambda^{N-a} \ln \lambda = \lambda^{N-a} [1 - (k-a) \ln \lambda] =: \rho(k). \quad (2.52)$$

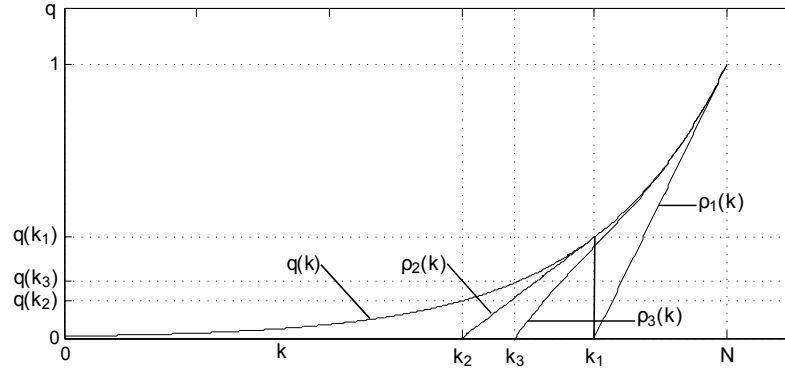


Figura 2.2: Curva característica del factor de olvido exponencial $q(k)$, aproximación de primer orden $\rho_1(k)$, $\rho_2(k)$ y aproximación de tercer orden $\rho_3(k)$.

Como se requiere que la recta que aproxima a $q(k)$ sea tangente en el punto $k = N$, entonces se toma $a = N$ y la recta resultante es:

$$\rho_1(k) = 1 - (k - N) \ln \lambda. \quad (2.53)$$

En Fig. 2.2 se grafica la recta (2.53). El valor de k_1 se obtiene como la solución de la ecuación $\rho_1(k_1) = 0$:

$$k_1 = N + \frac{1}{\ln \lambda}, \quad (2.54)$$

y el intervalo de datos que se consideran significativos con este criterio son:

$$w_1 = N - k_1 = -\frac{1}{\ln \lambda},$$

que es constante respecto a k . Con ésta última ecuación, se tiene que dado el intervalo de datos de interés $w_1 = N - k_1$, se puede determinar el factor de olvido necesario y está dado por:

$$\lambda_1 = \exp\left(-\frac{1}{w_1}\right). \quad (2.55)$$

Adicionalmente, se puede ver que el peso asignado al error en k_1 es

$$\begin{aligned} q(k_1) &= \lambda^{N-k_1} = \lambda^{N-(N+\frac{1}{\ln \lambda})} = \lambda^{-\frac{1}{\ln \lambda}}, \\ \ln q(k_1) &= \ln \lambda^{-\frac{1}{\ln \lambda}} = -\frac{1}{\ln \lambda} \ln \lambda = -1, \\ q(k_1) &= \exp(-1) \approx 0.3678. \end{aligned}$$

con lo que se concluye que bajo éste criterio, los errores con peso $q < \exp(-1)$ no son significativos para la estimación en el instante N .

Intervalo de datos significativos por aproximación de primer orden y dos iteraciones

Cuando se está ajustando un modelo que no representa adecuadamente al conjunto de datos experimentales (como cuando se ajusta una recta a una curva sinusoidal), se hace evidente que los errores con

pesos menores a $q(k_1)$ afectan a la estimación; por lo que el criterio de primer orden descrito anteriormente no es suficiente. Una alternativa es tomar una segunda iteración.

Un criterio para determinar los datos significativos para la estimación en el instante $k = N$ por aproximación de primer orden y dos iteraciones es considerar aquellos datos que se encuentren en el intervalo $k = [k_2, N]$ donde k_2 es la solución de la ecuación de la recta tangente a la curva $q(k)$ en el punto $(k_1, q(k_1))$.

Considerando (2.52) la aproximación de primer orden a $q(k)$ en el punto $a = k_1 = N + \frac{1}{\ln \lambda}$ es:

$$\rho_2(k) = (2 + (N - k) \ln \lambda) \exp(-1). \quad (2.56)$$

En Fig. 2.2 se grafica la recta (2.56). El valor de k_2 se obtiene como la solución de la ecuación $\rho_2(k_2) = 0$:

$$k_2 = N + \frac{2}{\ln \lambda},$$

y el intervalo de datos que se consideran significativos con este criterio son:

$$w_2 = N - k_2 = -\frac{2}{\ln \lambda},$$

Con ésta última ecuación, se tiene que dado el intervalo de datos de interés $w_2 = N - k_2$, se puede determinar el factor de olvido necesario y está dado por:

$$\lambda_2 = \exp\left(-\frac{2}{w_2}\right). \quad (2.57)$$

Adicionalmente, se puede ver que el peso asignado al error en k_2 es

$$q(k_2) = \exp(-2) \approx 0.1353.$$

con lo que se concluye que bajo éste criterio, los errores con peso $q < \exp(-2)$ no son significativos para la estimación en el instante N .

Intervalo de datos significativos por aproximación de primer orden y n iteraciones

Se pueden extender el criterio de aproximación de primer orden hasta n iteraciones; esto es la búsqueda de la solución de $q(k) = 0$ por el método de Newton; cabe señalar que tal raíz se encuentra en $-\infty$, por lo que el método no converge; sin embargo, las primeras n iteraciones son suficientes en cuanto respecta a la determinación del factor de olvido como se analizó para los casos $n = 1, 2$ anteriormente.

La aproximación de primer orden e iteración n con condición inicial $a = N$ es:

$$\rho_n(k) = \frac{n - (k - N) \ln \lambda}{\exp(n - 1)},$$

El valor de la raíz k_n se obtiene como la solución de la ecuación $\rho_n(k_n) = 0$:

$$k_n = N + \frac{n}{\ln \lambda},$$

y el intervalo de datos significativos bajo este criterio es:

$$w_n = N - k_n = -\frac{n}{\ln \lambda}.$$

Ahora se tiene que, dado el intervalo de datos de interés $w_n = N - k_n$, el factor de olvido está dado por:

$$\lambda_n = \exp\left(-\frac{n}{w_2}\right), \quad (2.58)$$

y adicionalmente se puede ver que el peso asignado al error en k_n es

$$q(k_n) = \exp(-n).$$

con lo que se concluye que bajo éste criterio, los errores con peso $q < \exp(-n)$ no son significativos para la estimación en el instante N .

De manera natural, se puede pensar que un mejor criterio consistiría en una aproximación de segundo orden para $q(k)$; sin embargo la aproximación de segundo orden de $q(k)$ es

$$\tilde{\rho}(k) = \lambda^{N-a} \left[1 - (k-a) \left(1 - \frac{k-a}{2} \ln \lambda \right) \ln \lambda \right],$$

cuyas raíces $\tilde{\rho}(\tilde{k})$ son complejas:

$$\tilde{k} = N + \frac{1}{\ln \lambda} \mp \frac{1}{\ln \lambda} i.$$

Puede pensarse en la proyección ortogonal de $\tilde{k}$ en el conjunto de los reales, sin embargo, al ser $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ la proyección ortogonal de $\tilde{k}$ sobre los reales es la parte real de $\tilde{k}$:

$$\Re(\tilde{k}) = N + \frac{1}{\ln \lambda},$$

que coincide exactamente con el criterio de primer orden (2.54).

Intervalo de datos significativos por aproximación de tercer orden

Un criterio para determinar los datos significativos para la estimación en el instante $k = N$ por aproximación de tercer orden es considerar aquellos datos que se encuentren en el intervalo $k = [k_\delta, N]$ donde k_δ es la raíz real de la aproximación de tercer orden de la curva $q(k)$ en el punto $(N, 1)$.

La aproximación de tercer orden a $q(k)$ en el punto $a = N$ es:

$$\begin{aligned} q(k) &\approx q(a) + \frac{dq}{dk}(a)(k-a) + \frac{1}{2} \frac{d^2q}{dk^2}(a)(k-a)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3q}{dk^3}(a)(k-a)^3 \\ &= \lambda^{N-a} \left\{ 1 - (k-a) \left[1 - (k-a) \left(\frac{1}{2} - \frac{(k-a) \ln \lambda}{6} \right) \ln \lambda \right] \ln \lambda \right\} \\ &= 1 - (k-N) \left[1 - (k-N) \left(\frac{1}{2} - \frac{(k-N) \ln \lambda}{6} \right) \ln \lambda \right] \ln \lambda =: \delta(k). \end{aligned} \quad (2.59)$$

En Fig. 2.2 se grafica la curva (2.59). Resolviendo la ecuación $\delta(k) = 0$ donde por comodidad se define $x := k - N$:

$$\frac{\ln^2 \lambda}{6} x^3 - \frac{\ln \lambda}{2} x^2 + x - \frac{1}{\ln \lambda} = x^3 - \frac{3}{\ln \lambda} x^2 + \frac{6}{\ln^2 \lambda} x - \frac{6}{\ln^3 \lambda} = x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

donde $p = -\frac{3}{\ln \lambda}$, $q = \frac{6}{\ln^2 \lambda}$, $r = -\frac{6}{\ln^3 \lambda}$. Considerando el cambio de variable $x = y - \frac{p}{3}$ se obtiene la ecuación:

$$y^3 + ay + b = 0,$$

donde $a = q - \frac{p^2}{3} = \frac{3}{\ln^2 \lambda}$ y $b = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r = -\frac{2}{\ln^3 \lambda}$. Analizando el discriminante

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{2}{\ln^6 \lambda} > 0,$$

se concluye que se tiene una raíz real y dos complejas. La raíz real es:

$$k_\delta = \frac{1}{\ln \lambda} \left(1 + (1 + \sqrt{2})^{1/3} - \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^{1/3}} \right) + N = \frac{\xi}{\ln \lambda} + N,$$

donde $\xi = 1 + (1 + \sqrt{2})^{1/3} - \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^{1/3}}$. El intervalo de datos que se consideran significativos con este criterio son:

$$w_\delta = N - k_\delta = -\frac{\xi}{\ln \lambda}.$$

Con ésta última ecuación, se tiene que dado el intervalo de datos de interés $w_\delta = N - k_\delta$, se puede determinar el factor de olvido necesario y está dado por:

$$\lambda_\delta = \exp \left(-\frac{\xi}{w_\delta} \right), \quad (2.60)$$

y adicionalmente se puede ver que el peso asignado al error en k_δ es

$$q(k_\delta) = \exp(-\xi) \approx 0.2026.$$

con lo que se concluye que bajo éste criterio, los errores con peso $q < \exp(-\xi)$ no son significativos para la estimación en el instante N .

Intuitivamente se puede pensar en un criterio que considere la densidad de los errores; ésto se puede expresar como la integral:

$$g(k) = \int q(k) dk = \int \lambda^{N-k} dk = -\frac{\lambda^{N-k}}{\ln \lambda};$$

sin embargo, se puede probar que las raíces de las aproximaciones de primer, segundo y tercer orden coinciden con las raíces de las mismas aproximaciones para la función $q(k)$; analicemos para el caso de primer orden. La aproximación de primer orden de $g(k)$ es:

$$g(k) \approx g(a) + \frac{dg(a)}{dk}(k-a) = -\frac{\lambda^{N-a}}{\ln \lambda} + (k-a)\lambda^{N-a} = \lambda^{N-a}[(k-a) - \frac{1}{\ln \lambda}] =: \varrho(k). \quad (2.61)$$

La recta $\varrho(k)$ tangente a $g(k)$ en $k = N$ se obtiene cuando $a = N$:

$$\varrho_1(k) = k - N - \frac{1}{\ln \lambda}. \quad (2.62)$$

La solución κ_1 de la ecuación $\varrho_1(\kappa_1) = 0$ es:

$$\kappa_1 = N + \frac{1}{\ln \lambda},$$

que coincide con (2.54).

2.3.6. Monitor del número de condición en el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

En el problema de estimación de parámetros, algunos problemas derivados en la limitada precisión de la computadora, errores de medición o errores en los datos, etc., pueden provocar errores como:

- La matriz Φ es perturbada debido a errores en las mediciones por una matriz E donde $|e_{ij}| < \delta$ donde δ depende de la precisión del instrumento de medición, y por lo tanto en realidad se está resolviendo el sistema $(\Phi + E)\Theta = y$ en vez de $\Phi\Theta = y$.
- Las computadoras trabajan con aritmética de *punto flotante* y todas las operaciones aritméticas son en el subconjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$. Lo anterior puede caracterizarse por la función $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ llamada *función de redondeo* con la cual si $x, y \in \mathbb{R}$, el producto $x \cdot y \in \mathbb{R}$ la computadora realiza $r(r(x) \cdot r(y))$.

Con lo anterior la pregunta natural es ¿cuánto afecta el error ya sea en Φ , en y o en ambos a la solución Θ del problema $\Phi\Theta = y$? Sea $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular y $y \in \mathbb{R}^n$, estamos interesados en saber como es afectada la solución del problema $\Phi\Theta = y$ si se perturban los datos ingresados (*input*) Φ e y . Con tales fines, existe una cantidad que ofrece una medida de la sensibilidad de la solución a las perturbaciones; dicha cantidad es conocida como *número de condición* y se define como:

$$\text{cond}(\Phi) = \|\Phi\| \|\Phi^{-1}\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio de las matrices; las más usadas son las normas inducidas ℓ_p y la norma de Frobenius definidas como:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, \quad \|A\|_F^2 = \text{trace}(A^T A),$$

para $p = 1, 2, \infty$. Se dice que A es *bien-condicionada* (well-conditioned) si $\text{cond}(A)$ es pequeño, el correspondiente problema $Ax = b$ se dice es *bien-planteado* (well-posed); por el contrario, se dice que A es *mal-condicionada* (ill-conditioned) si $\text{cond}(A)$ es muy grande y el problema $Ax = b$ se dice que es *mal-planteado* (ill-posed). Note que cuando Φ es singular entonces $\text{cond}(\Phi) = \infty$, por el contrario, cuando $\Phi = \mathbb{I}$ entonces $\text{cond}(\Phi) = 1$.

De manera general, como parte de la tarea de la estimación de parámetros, se diseñan los experimentos sobre el sistema de tal manera que los vectores de regresión φ sean linealmente independiente y como consecuencia la matriz Φ sea bien condicionada y pueda confiarse en la estabilidad de la solución al problema de mínimos cuadrados; sin embargo, cuando esto no es posible se requiere tener alguna referencia de que tan confiable es la solución. En este trabajo se propone un monitor del condicionamiento de Φ que consiste en calcular el número de condición de Φ en norma de Frobenius en cada iteración k .

La matriz Φ_k^{-1} está definida en el algoritmo de mínimos cuadrados como P_k , mientras que la matriz Φ_k se puede construir por el conocimiento de φ_k en cada instante k como:

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} + \varphi_k^T \varphi_k.$$

Por otro lado, sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que puede escribirse como $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ donde $a_i \in \mathbb{R}^n$, entonces la norma al cuadrado $\|A\|_F^2$ puede escribirse como

$$\|A\|_F^2 = \text{trace}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \langle a_i, a_i \rangle.$$

donde $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ es el producto interno. Considerando $D_k = [d_1(k) \ d_2(k) \ \cdots \ d_n(k)]$, $P_k = [p_1(k) \ p_2(k) \ \cdots \ p_n(k)]$ donde $d_i(k), p_j(k) \in \mathbb{R}^n$, entonces el número de condición al cuadrado en norma de Frobenius de Φ_k puede calcularse como:

$$\text{cond}_F^2(\Phi_k) = \|D_k\|_F^2 \|P_k\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \langle d_i(k), d_i(k) \rangle \sum_{j=1}^n \langle p_j(k), p_j(k) \rangle. \quad (2.63)$$

2.4. Estimación de parámetros para modelos no lineales

Existen muchos fenómenos en la física que no pueden ser modelados satisfactoriamente con modelos lineales; para estos fenómenos se construyen modelos no lineales y para tales modelos también existe el problema de ajuste por estimación de parámetros como en el caso de los modelos lineales.

Al igual que en el caso lineal, para el caso no lineal la estimación de parámetros se puede formular como un problema de optimización, en el que el mejor modelo es aquel que mejor se ajusta a los datos de acuerdo con un criterio dado. Para la estimación de parámetros de *modelos no lineales respecto a los parámetros* consiste en considerar los siguientes modelos:

$$y = f(\varphi, \theta) + w, \quad (2.64a)$$

$$\hat{y} = f(\varphi, \hat{\theta}), \quad (2.64b)$$

donde f es alguna función no lineal respecto a los parámetros θ y nos referiremos a ella como *función de regresión*; las demás literales coinciden con las definiciones dadas en §2.3. El objetivo es minimizar el funcional:

$$S(\theta) = \|e\| = \|y - \hat{y}\| = \|y - f(\varphi, \hat{\theta})\|, \quad (2.65)$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ y $e = y - \hat{y}$ es el error o *residual* que es la diferencia entre el modelo ajustado y los datos. Particularmente, se sigue considerando la norma ℓ_2 y el funcional (2.65) para obtener nuevamente el *funcional de mínimos cuadrados*. El problema de estimación de parámetros $\hat{\theta}$ en (2.64b) se le conoce como *regresión no lineal*. En general, el problema de minimización global para modelos no lineales es un problema abierto, sin embargo existen muchos métodos para la minimización local, entre los que destacan:

1. linealización,
2. linealización local o método de Newton,
3. método de Gauss-Newton,
4. método de Levenberg-Marquardt.

La linealización consiste en reducir el modelo no lineal a uno lineal basándose en simplificaciones y otras técnicas, con la finalidad de poder aplicar los algoritmos para modelos lineales. En las secciones siguientes se presentan otros métodos alternativos.

2.4.1. Linealización local o método de Newton

La búsqueda de un mínimo local por el método de Newton es un algoritmo recursivo para el cual es necesaria un supuesto inicial θ_0 que esté próximo al mínimo local $\bar{\theta}$ para lo que se genera una sucesión $\{\theta_k\}$ que converge a $\bar{\theta}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Considerando la función de costo (2.65) para la versión discreta del problema con la norma ℓ_2 , se tiene:

$$S(\theta) = \|e_i\|_2^2 = \|y_i - \hat{y}_i\|_2^2 = \|y_i - f(\varphi_i, \hat{\theta}(i))\|_2^2 = E^T E; \quad E = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_N]^T. \quad (2.66)$$

Linealizando la función de costo respecto a los parámetros θ por expansión en serie de Taylor se obtiene:

$$S(\theta) = S(\theta_0) + J_S(\theta_0)h + O(\|\theta - \theta_0\|^2); \quad h = \theta - \theta_0. \quad (2.67)$$

Por el teorema 1 se sabe que el mínimo de $S(\theta)$ debe satisfacer $\nabla S(\theta) = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} J_S(\theta) &\approx J_S(\theta_0) + H_S(\theta_0)h = 0, \\ H_S(\theta_0)h &= -J_S(\theta_0), \\ \theta - \theta_0 &= -[H_S(\theta_0)]^{-1} J_S(\theta_0), \\ \theta &= \theta_0 - [H_S(\theta_0)]^{-1} J_S(\theta_0). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Para calcular el jacobiano $J_S(\theta_0)$ y el hessiano $H_S(\theta_0)$, primero consideremos el jacobiano del error $J_E(\theta)$:

$$J_E(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} E = \frac{\partial}{\partial \theta} [y - f(\phi, \theta)] = -\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \theta) = -J_f^T(\theta), \tag{2.69}$$

y ahora se puede obtener $J_S(\theta_0)$ y $H_S(\theta_0)$ como:

$$\begin{aligned} J_S(\theta_0) &= \frac{\partial}{\partial \theta} [E^T(\theta_0)E(\theta_0)] = 2\frac{\partial E(\theta_0)}{\partial \theta} E(\theta_0) = 2J_E(\theta_0)E(\theta_0) = -2J_f^T(\theta_0)E(\theta_0), \\ H_S(\theta_0) &= \frac{\partial}{\partial \theta} [-2J_f^T(\theta_0)E(\theta_0)] = -2H_f(\theta_0)E(\theta_0) - 2J_f^T(\theta_0)J_f(\theta_0), \end{aligned} \tag{2.70}$$

que permite reescribir (2.68) en términos de la *función de regresión no lineal* como:

$$\theta = \theta_0 - [H_S(\theta_0)]^{-1} J_S(\theta_0) = \theta_0 - [J_f^T(\theta_0)J_f(\theta_0) - H_f(\theta_0)E(\theta_0)]^{-1} J_f^T(\theta_0)E(\theta_0), \tag{2.71}$$

lo que pone de manifiesto el algoritmo de minimización recursivo de Newton; en el algoritmo 4 se resume este método de minimización.

Algorithm 4: Minimización por el método de Newton.

Data: $\hat{\theta}_{k-1}, y_k$.

Result: $\hat{\theta}_k$.

- 1 $J_S(\hat{\theta}_{k-1}) = -2J_f^T(\hat{\theta}_{k-1})E(\hat{\theta}_{k-1});$
 - 2 $H_S(\hat{\theta}_{k-1}) = -2H_f(\hat{\theta}_{k-1})E(\hat{\theta}_{k-1}) - 2J_f^T(\hat{\theta}_{k-1})J_f(\hat{\theta}_{k-1});$
 - 3 $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - [H_S(\hat{\theta}_{k-1})]^{-1} J_S^T(\hat{\theta}_{k-1});$
 - 4 **return** $\hat{\theta}_k$.
-

2.4.2. Método de Gauss-Newton

Del método de Newton presentado en el algoritmo 4 se tiene la desventaja de tener que estar calculando la matriz Jacobiana y Hessiana en cada iteración, esto ya es en sí una carga computacional considerable, más aún en algunos problemas, las segundas derivadas son excesivamente complicadas. Por esta razón, el método de Gauss-Newton es una modificación que consiste principalmente en aproximar las matrices $J(x)$ y $H(x)$.

A diferencia del algoritmo de Newton, en vez de linealizar la función de costo $S(\theta)$, se linealiza el vector de error E . Considerando la expansión de $E(\theta)$ por serie de Taylor:

$$E(\theta) \approx E(\theta_0) + J_E(\theta_0)h, \quad h = \theta - \theta_0, \tag{2.72}$$

y la función de costo (2.66), se tiene que

$$S(\theta) \approx [E(\theta_0) + J_E(\theta_0)h]^T [E(\theta_0) + J_E(\theta_0)h]. \quad (2.73)$$

Para evitar el uso excesivo de espacio, en las ecuaciones siguientes se omite la dependencia en (2.73); es decir $E = E(\theta_0)$ y $J_E = J_E(\theta_0)$:

$$\begin{aligned} S(\theta) &\approx [E^T + h^T J_E^T] [E + J_E h] = E^T E + E^T J_E h + h^T J_E^T E + h^T J_E^T J_E h, \\ &= E^T E + 2h^T J_E^T E + h^T J_E^T J_E h, \end{aligned} \quad (2.74)$$

derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (E^T E + 2h^T J_E^T E + h^T J_E^T J_E h) = \frac{\partial}{\partial \theta} R(h) = \frac{\partial}{\partial h} R(h) \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial h} R(h), \\ &= 2J_E^T E + 2J_E^T J_E h = 0, \\ h &= -[J_E^T J_E]^{-1} J_E^T E, \\ \theta - \theta_0 &= -[J_E^T J_E]^{-1} J_E^T E, \\ \theta &= \theta_0 - [J_E^T J_E]^{-1} J_E^T E, \end{aligned} \quad (2.75)$$

considerando el jacobiano del error $J_E = -J_f^T$ (2.69):

$$\theta = \theta_0 + [J_f^T J_f]^{-1} J_f^T E, \quad (2.76)$$

donde finalmente se pone de manifiesto el algoritmo recursivo de Gauss-Newton que se resume en el algoritmo 5.

Algorithm 5: Minimización por el método de Gauss-Newton.

Data: $\hat{\theta}_{k-1}$, y_k .

Result: $\hat{\theta}_k$.

1 $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + [J_f^T(\hat{\theta}_{k-1})J_f(\hat{\theta}_{k-1})]^{-1} J_f^T(\hat{\theta}_{k-1})E(\hat{\theta}_{k-1});$
 2 **return** $\hat{\theta}_k$.

2.4.3. Método de Levenber-Marquardt

Del método de Gauss-Newton, la matriz $J^T(x)J(x)$ no siempre es invertible o está *mal condicionada*; por lo que la solución no es única o es muy sensible a perturbaciones en los datos; el método de Levenber-Marquardt incluye un término de *penalización* α para modificar los *valores singulares* de la matriz $J^T(x)J(x)$ y hacerla bien condicionada; de esta manera, la solución a éste problema de minimización se vuelve estable numéricamente. Éste método se resumen en el algoritmo 6.

Ejemplo 1 Considere un mecanismo para pulir lentes; éste mecanismo es tal que la herramienta varía la presión que ejerce sobre la superficie y se sabe que puede aproximarse por la ecuación:

$$\hat{y} = a \sin(\omega t + \phi) + b, \quad (2.77)$$

donde y es la presión que ejerce la herramienta sobre la superficie, a es la amplitud de oscilación, ω es la frecuencia angular de oscilación, t es el tiempo, ϕ es la fase y b es la componente estática de la presión

Algorithm 6: Minimización por el método de Levenber-Marquardt.

Data: $\hat{\theta}_{k-1}, y_k$.**Result:** $\hat{\theta}_k$.

1 $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \left[J_f^T(\hat{\theta}_{k-1}) J_f(\hat{\theta}_{k-1}) + \alpha \mathbb{I} \right]^{-1} J_f^T(\hat{\theta}_{k-1}) E(\hat{\theta}_{k-1});$

2 **return** $\hat{\theta}_k$.

ejercida. El problema consiste en encontrar los parámetros a, ω, ϕ, b teniendo disponibles únicamente mediciones experimentales y_k y t_k . Para aplicar el método de Gauss-Newton, se define el vector de parámetros $\Theta_i = [a_i \ \omega_i \ \phi_i \ b_i]^T$ y se procede a obtener el jacobiano:

$$J_f(\Theta_i) = \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \Theta_i} = \begin{bmatrix} \partial \hat{y}_k / \partial a_i & \partial \hat{y}_k / \partial \omega_i & \partial \hat{y}_k / \partial \phi_i & \partial \hat{y}_k / \partial b_i \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sin(\omega_i t_k + \phi_i) & a_i t_k \cos(\omega_i t_k + \phi_i) & a_i \cos(\omega_i t_k + \phi_i) & 1 \end{bmatrix},$$

con lo que se puede aplicar directamente el algoritmo 5. La implementación de éste algoritmo puede realizarse en un programa script de Matlab como se muestra en Fig. 2.4. Para este ejemplo en particular, los datos experimentales están almacenados en la variable `data` donde la columna uno (`data(:,1)`) es el vector tiempo (seg.) muestreado a $T = 0.1$ seg. y la columna dos (`data(:,2)`) es la fuerza medida. El vector de parámetros iniciales es $[0.1; 3; 0; 1.7]$, el número de iteraciones es diez y los datos a procesar cien (10 seg.).

En Fig. 2.3.Izq se grafican dos curvas superpuestas, y_E corresponde a datos experimentales e y_A corresponde al modelo (2.77) ajustado con los parámetros $\Theta_{100} = [0.1247 \ 3.1850 \ -1.3813 \ 1.7638]^T$. $\diamond$

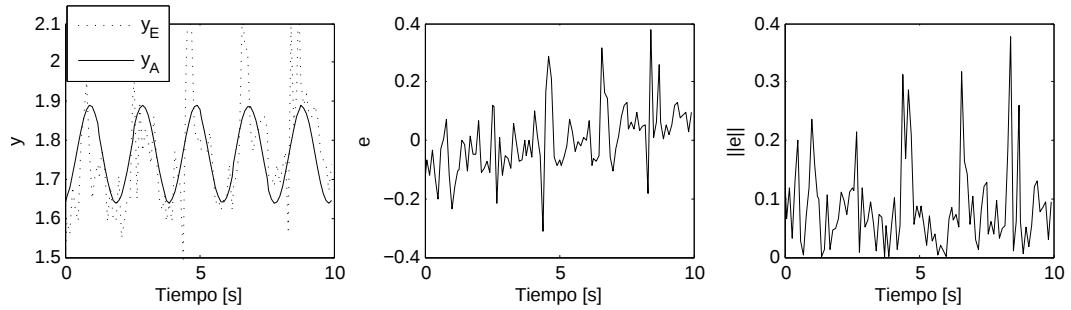


Figura 2.3: Izq.) Curva ajustada y_A del modelo (2.77) a los datos experimentales y_E aplicando el método de Gauss-Newton. Centro) Error $e = y_E - y_A$. Der.) Norma ℓ_2 del error $\|e\|^2 = e^T e$.

2.5. Validación de algoritmos de estimación de parámetros por aplicación a modelos sintéticos

Como primer paso para la validación de los algoritmos presentados en las secciones anteriores, se crearán ejemplos o problemas en los que controlamos todas las variables (se conocen los parámetros y las mediciones se pueden considerar datos exactos o sin error, etc.) y veremos el comportamiento de los algoritmos antes mencionados. Este proceso es fundamental para depurar los programas computacionales y verificar la robustez de los algoritmos frente a ciertas perturbaciones en los datos.

```

clc                                %Borrar la ventana de comandos
N = 100;                          %Número de datos (experimentos)
t = data(1:N,1);                  %Vector de tiempo (medición)
y = data(1:N,2);                  %Vector de fuerzas (observación)
P = [0.1;3;0;1.7];               %Parámetros iniciales

for i=1:10 %Número de iteraciones
    %Jacobiano
    J = [(sin(P(2)*t + P(3)*ones(n,1)))'
          (t.*(P(1)*cos(P(2)*t + P(3)*ones(n,1))))'
          (P(1)*cos(P(2)*t + P(3)*ones(n,1)))'
          (ones(n,1))']';
    %Salida del modelo teórico
    hy = P(1)*sin(P(2)*t+P(3)*ones(n,1))+P(4)*ones(n,1);
    %Error (residuo)
    re = y - hy;
    %Iteración del método de Gauss-Newton
    Delta = inv(J'*J)*J'*re;
    P = P + Delta;
end

P %Imprime los parámetros estimados
%Calcular la curva del modelo teórico
hy = P(1)*sin(P(2)*t + P(3)*ones(n,1)) + P(4)*ones(n,1);

```

(a) Implementación del algoritmo de Gauss-Newton.

```

%Graficar datos experimentales y modelo ajustado
subplot(1,3,1)
plot(t,y,':k',t,hy,'-k')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('y')
legend('y_E', 'y_A')
axis([0, N/10, 1.5, 2.1])
grid off
%Graficar error de predicción
subplot(1,3,2)
plot(t,re,'-k')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('e')
grid on
%Graficar norma ell_2 del error de predicción
subplot(1,3,3)
plot(t,sqrt(re.*re),'-k')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('||e||')
grid on

```

(b) Programa para la obtención de las gráficas del resultado del algoritmo de Gauss-Newton.

Figura 2.4: Programa script en Matlab para la estimación de parámetros del ejemplo 1 aplicando el método de Gauss-Newton.

Como segundo paso se procede a la validación experimental, donde los algoritmos implementados se aplican a una planta real. La validación experimental se aborda en §2.6.

Ejemplo 2 Considere el sistema no lineal respecto a t pero lineal respecto a los parámetros a_1, a_2, a_3 :

$$y(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t), \quad (2.78)$$

donde

$$f_1(t) = \sin t, \quad f_2(t) = \cos(2t), \quad f_3(t) = \sin\left(\frac{3}{5}t\right) \left(\sin\left(\frac{1}{3}t\right) + \sin(4t)\right). \quad (2.79)$$

Realizando N experimentos con periodo T sobre el sistema (2.78) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 y(t_1) &= a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + a_3 f_3(t_1), \\
 y(t_2) &= a_1 f_1(t_2) + a_2 f_2(t_2) + a_3 f_3(t_2), \\
 &\vdots \\
 y(t_k) &= a_1 f_1(t_k) + a_2 f_2(t_k) + a_3 f_3(t_k), \\
 &\vdots \\
 y(t_N) &= a_1 f_1(t_N) + a_2 f_2(t_N) + a_3 f_3(t_N),
 \end{aligned}$$

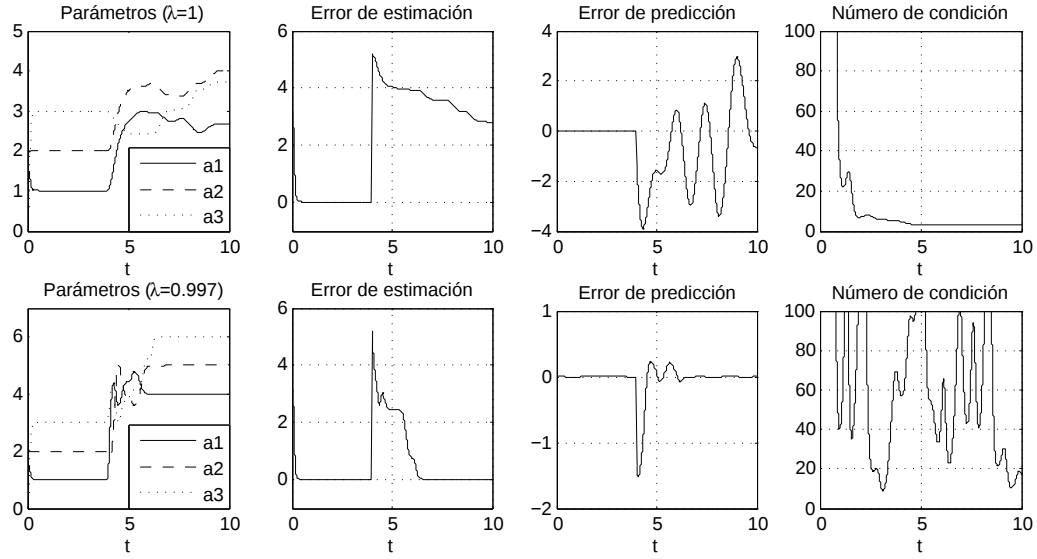
que se puede escribir en la forma matricial $Y = \Phi\Theta$ que es una ecuación lineal respecto a los parámetros Θ donde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 = y(t_1) \\ y_2 = y(t_2) \\ \vdots \\ y_N = y(t_N) \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}; \quad \varphi_k = (\phi_{1,k} \quad \phi_{2,k} \quad \phi_{3,k}); \quad \begin{aligned} \phi_{1,k} &= f_1(t_k), \\ \phi_{2,k} &= f_2(t_k), \\ \phi_{3,k} &= f_3(t_k). \end{aligned} \quad (2.80)$$

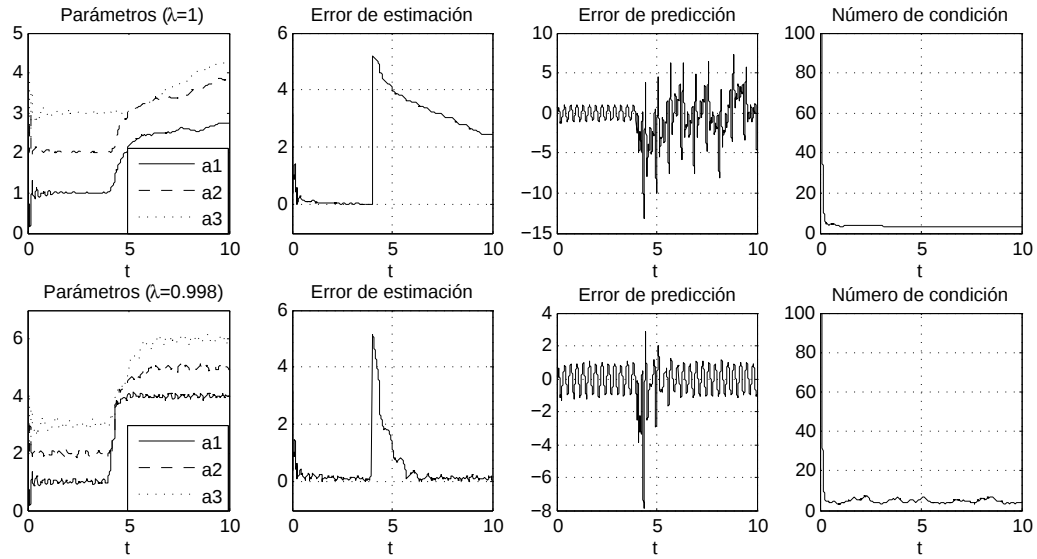
Para fines ilustrativos, se proponen los parámetros

$$\Theta(t) = \begin{cases} [1, 2, 3]^T, & 0 \leq t < 4, \\ [4, 5, 6]^T, & 4 \leq t \leq 10, \end{cases} \quad (2.81)$$

y se realizan dos simulaciones correspondientes a los factores de olvido $\lambda \in \{1, 0.997\}$, $T = 0.001$ y $t = [0, 10]$. Los resultados se muestran en Fig. 2.5(a). $\diamond$



(a) Estimación de parámetros procesando datos sin error, norma del error de estimación $\|\Theta - \hat{\Theta}\|_2$ y error de predicción $y - \hat{y}$. Arriba) con $\lambda = 1$. Abajo) con $\lambda = 0.997$.



(b) Estimación de parámetros procesando datos con ruido, norma del error de estimación $\|\Theta - \hat{\Theta}\|_2$ y error de predicción $y - \hat{y}$. Arriba) con $\lambda = 1$. Abajo) con $\lambda = 0.998$.

Figura 2.5: Ejemplos de estimación de parámetros por mínimos cuadrados con factor de olvido.

Ejemplo 3 Una de las características interesantes del método de mínimos cuadrados, es la capacidad que éste presenta de estimar parámetros procesando datos que están contaminados con perturbaciones como lo son

ruido aleatorio de tipo aditivo en las mediciones y las incertidumbres (dinámicas no modeladas). Considere el sistema

$$y(t) = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) + a_3\phi_3(t) + w_4(t), \quad (2.82)$$

que representa al sistema del ejemplo anterior, con la diferencia de que esta vez los regresores $\phi_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ y las mediciones $y(t)$ están contaminadas por un término $w_j(t)$, $j = \overline{1, 4}$ que definimos como:

$$\begin{aligned} \phi_{1,k} &= f_1(t_k) + w_1(t_k), & w_1(t_k) &= \sin(50t_k), \\ \phi_{2,k} &= f_2(t_k) + w_2(t_k), & w_2(t_k) &= \sin(40t_k), \\ \phi_{3,k} &= f_3(t_k) + w_3(t_k), & w_3(t_k) &= \sin(30t_k), \\ & & w_4(t_k) &= \sin(20t_k). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Considerando los parámetros (2.81) y los factores de olvido $\lambda = \{1, 0.998\}$, $T = 0.001$ y $t = [0, 10]$; se obtienen los resultados mostrados en Fig. 2.5(b). $\diamond$

Ejemplo 4 De la gráfica de evolución de los parámetros mostrada en Fig. 2.5(b) cuando $\lambda = 0.998$ se observa claramente que la sucesión $\hat{\Theta}$ alcanzan convergencia asintótica a una vecindad alrededor de Θ donde una vez en esa vecindad se mantiene estable. Para determinar algún valor de dicha vecindad que sea el mejor posible, se aplica el algoritmo 3. El valor de $\lambda = 0.998$ es igual al de la estimación inicial con la finalidad de suavizar la misma cantidad de datos ajustando a una recta horizontal. En Fig. 2.6 se muestran los resultados donde se puede apreciar que el algoritmo para la estimación de asíntotas puede verse como un filtro pasa-bajas del cual se obtiene un mejor resultado sobre la estimación de los parámetros. $\diamond$

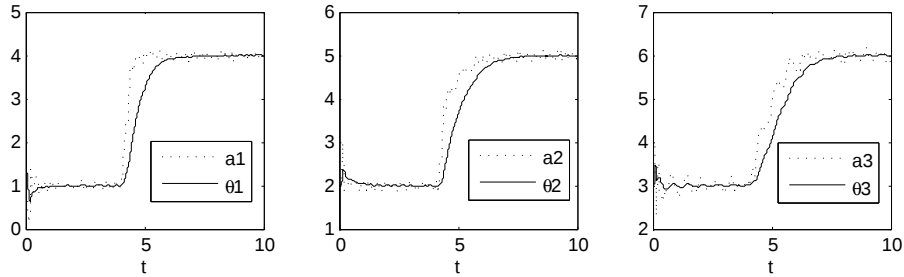
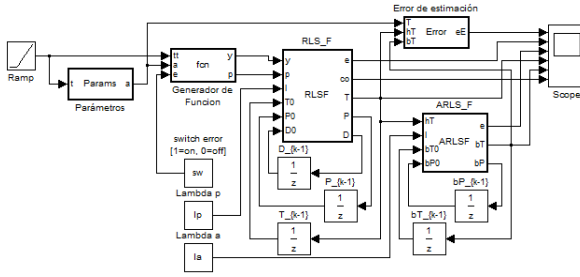


Figura 2.6: Estimación de asíntotas de convergencia.

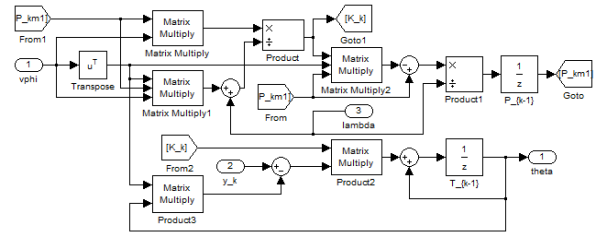
Ejemplo 5 Los ejemplos previos pueden implementarse en la plataforma MATLAB-Simulink donde se emplea una *Embedded Matlab function: RLSF* para la implementación del algoritmo 2 para la estimación de parámetros y del algoritmo (2.63) para el monitoreo del número de condición; también se incluye una *Embedded Matlab function: RLSF* donde se implementa el algoritmo 3 para la estimación de asíntotas de convergencia. En Fig. 2.7(a) se muestra el diagrama de bloques Simulink principal correspondientes a los ejemplos anteriores. En Fig. 2.7(b) se muestra la implementación del algoritmo 2 en el entorno de programación Simulink. En los bloques $[P_{-}\{k-1\}]$ y $[T_{-}\{k-1\}]$ se deben asignar las condiciones iniciales del estimador, típicamente: $\text{sigma} \cdot \text{eye}(n)$ para $\text{sigma} \in [10^3, 10^6]$ y $\text{zeros}(n, 1)$ para la matriz de covarianza P_0 y el vector de parámetros Θ_0 respectivamente y de manera similar para $\bar{P}_0$ y $\bar{\Theta}_0$. $\diamond$

2.6. Validación experimental de los algoritmos de estimación de parámetros por aplicación a un motor DC con interfaz de entrada y salida

Ya se han validado los algoritmos de estimación de parámetros por aplicación a modelos sintéticos; ésto permitió depurar los programas computacionales, verificar el correcto funcionamiento, tener un grado



(a) Diagrama de bloques en MATLAB-Simulink.



(b) Implementación del algoritmo 2 en el entorno de programación Simulink.

```
function [y,p] = fcn(tt,a,e)
% tt es una señal de tiempo DISCRETIZADA
% a es un vector columna de parámetros
% e es switch para la señal del error
p = [f1(tt,e) f2(tt,e) f3(tt,e)];
if e==1; y = a(1)*p(1) + a(2)*p(2) + a(3)*p(3)+sin(20*tt);
else y = a(1)*p(1) + a(2)*p(2) + a(3)*p(3);
end
end
function y = f1(tt,e)
if e==1; y = sin(tt)+sin(50*tt);
else y = sin(tt);
end
end
function y = f2(tt,e)
if e==1; y = cos(2*tt)+sin(40*tt);
else y = cos(2*tt);
end
end
function y = f3(tt,e)
if e==1; y = sin(3*tt/5)*(sin(tt/3)+sin(4*tt))+sin(30*tt);
else y = sin(3*tt/5)*(sin(tt/3)+sin(4*tt));
end
end
end
```

(c) Embedded MATLAB Function: fcn.

```
function [e,co,T,P,D] = RLSF(y,p,l,T0,P0,D0)
% Estimación por mínimos cuadrados y número
% de condición
% y es un escalar de observación
% p es un vector fila de regresores
% l es el factor de olvido (0,1]
% co es el número de condición
K = P0*p'/(1 + p'*P0*p');
P = (P0 - K*p'*P0)/l;
e = y - p'*T0;
T = T0 + K*e;

D = l*D0 + p'*p;
sum1 = 0;
sum2 = 0;
for i = 1:numel(T)
    sum1 = sum1 + D(:,i)'*D(:,i);
    sum2 = sum2 + P(:,i)'*P(:,i);
end
co = sqrt(sum1*sum2);
end
```

(d) Embedded MATLAB Function: RLSF.

```
function [e,bT,bP] = ARLSF(hT,l,bT0,bP0)
% Estimación de asíntotas de convergencia
% hT = salida del estimador RLSF
% bT = estimación de la asíntota de hT
% bP = Vector de covarianza
I = ones(numel(hT),1);
K = bP0./(1*I + bP0);
bP = (bP0 - K.*bP0)./l;
e = hT - bT0;
bT = bT0 + K.*e;
end
```

(e) Embedded MATLAB Function: ARLSF.

```
function eE = Error(T,hT,bT)
% Calcula norma L2 error estimación
% T = vector de parámetros exactos
% hT = vector de parámetros estimados
% bT = asíntota de parámetros estimados
e = T-hT;
heE = sqrt(e'*e);
e = T-bT;
beE = sqrt(e'*e);
eE = [heE beE];
end
```

(f) Embedded MATLAB Function: Error.

```
function a = Params(t)
% Cambio del vector de parámetros
% en t = 4.
if t<4; a = [1 2 3]';
else a = [4 5 6]';
end
```

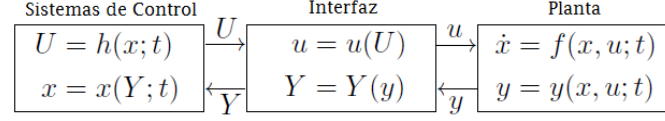
(g) Embedded MATLAB Function: Params.

Figura 2.7: Implementación en MATLAB-Simulink de los algoritmos 2, 3 y (2.63) aplicados a los ejemplos 2 y 3.

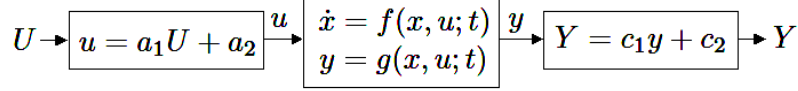
mayor de seguridad que funcionaran en plantas reales, entre otras cosas. Ahora se procede con otra validación un poco más exigente, en ésta ocasión se aplica a una planta real; se elige como planta de prueba un motor DC ya que ésta planta es de complejidad reducida (modelo lineal) y de primer orden (sistema escalar) con la finalidad de hacer más fácil la comprobación del correcto funcionamiento de los algoritmos, el software y el hardware (tarjetas de adquisición de datos, conectores, etc.). En esta sección solo se consideran los algoritmos de estimación para modelos lineales a los parámetros, no se aborda para modelos no lineales a los parámetros.

Las configuraciones típicas de sistemas de control pueden dividirse principalmente en tres partes: la planta, el controlador y la interfaz entre los dos últimos [32]. En Fig. 2.8(a) se ilustra una configuración típica de sistemas dinámicos y los sistemas de control con interfaz entre estos; debido a esta configuración,

no se puede operar directamente sobre la entrada del sistema, al igual que no se pueden realizar mediciones directamente.



(a) Sistemas de control en lazo cerrado con interfaces de entrada y salida.



(b) Conjunto interfaz de entrada, sistema e interfaz de salida.

Figura 2.8: Configuración típica de los sistemas de control con interfaces de entrada y salida.

Las interfaces juegan el papel de acoplamiento entre las señales del controlador (digitales y de baja magnitud¹) y las del sistema (continuas y de alta magnitud²) para ser lo suficientemente potentes para la planta y lo suficientemente bajas para poder ser manipulables por el controlador.

Una de las características de estas interfaces es que son diseñadas de tal manera que los formatos de señales continuas y/o discretas sean transparentes tanto para el controlador como para el sistema y que las operaciones realizables por la interfaz sean estrictamente escalados y traslaciones lineales e invariantes. Por esta razón, se considera una interfaz para un sistema arbitrario que modifica las señales sólo con escalado y traslación de señales como se ilustra en Fig. 2.8(b).

Considerando el modelo lineal de primer orden (1.7) para el motor DC que reescribimos nuevamente como

$$\dot{\omega} = -b_1\omega + b_2v, \quad (2.84)$$

donde ω es la velocidad angular del eje del motor, $b_1 = B/J + K^2/(RJ)$ es el coeficiente de fricción, $b_2 = K/(RJ)$ una ganancia de amplificación de la entrada y v es el voltaje aplicado. Suponiendo que las interfaces de entrada y salida son invariantes en el tiempo, aportan únicamente amplificación lineal (a_1, c_1) y traslación constante de la entrada (conocida como *offset*) (a_2, c_2) como:

$$v = a_1V + a_2, \quad (2.85a)$$

$$W = c_1\omega + c_2, \quad (2.85b)$$

donde W y V son las señales que entrega la interfaz que se corresponden con ω y v respectivamente.

Por la ecuación (2.85b) se tiene que $\omega = \frac{1}{c_1}(W - c_2)$ y $\dot{\omega} = \frac{1}{c_1}\dot{W}$ entonces:

$$\dot{W} = -b_1W + a_1b_2c_1V + a_2b_2c_1 + b_1c_2 = \eta_1W + \eta_2V + \eta_3, \quad (2.86)$$

donde $\eta_1 = -b_1$, $\eta_2 = a_1b_2c_1$ y $\eta_3 = a_2b_2c_1 + b_1c_2$. Finalmente, se han podido unificar la ecuación (2.84) que representa al motor DC y las ecuaciones (2.85) que representa las interfaces de entrada y salida en una única ecuación (2.86) lo que simplifica el proceso de estimación de parámetros tanto por la reducción de parámetros (de seis parámetros $b_1, b_2, a_1, a_2, c_1, c_2$ a tres parámetros η_1, η_2, η_3) como el número de sistemas (de tres ecuaciones (2.84), (2.85a), (2.85b) a una ecuación (2.86)).

¹Se expresa “baja magnitud” para generalizar tanto a voltaje, corriente o ambos.

²Se expresa “alta magnitud” para generalizar adecuadamente niveles elevados de corriente, voltaje, temperatura, fuerza, etc., dependiendo del sistema.

2.6.1. Pre-filtrado

El sistema sobre el que se trabaja cuenta con un sensor que mide la velocidad a la que gira el eje del motor; sin embargo, la medición incluye error no estacionario. Para obtener $\dot{W}$ no se puede derivar W directamente por la alta sensibilidad de la derivada al ruido en la medición.

Si el ruido en la medición fuera estacionario, entonces se podría derivar directamente; suponga que la medición de la variable $x(t)$ es $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta$ donde δ es el término de error constante tan grande como uno quiera, en ese caso, $x' = \tilde{x}'$. Por otro lado, suponga que $\delta(t) = \sin(\phi^2 t)/\phi$, en este caso $\tilde{x}' = x' + \phi \cos(\phi^2 t)$; note que si $\phi \rightarrow \infty$ entonces $\delta \rightarrow 0$, sin embargo aún siendo el término de error δ muy “pequeño” (o baja amplitud; del orden de $1/\phi$), la alta frecuencia (del orden de ϕ^2) provoca que la derivada $\tilde{x}'$ sea muy distinta de x' (del orden de $\|\phi \cos(\phi^2 t)\|$). Con ésto se puede concluir que, más que la amplitud, es la componente frecuencial del término de error lo que hace que la derivada de la medición con error sea muy distinta respecto a mediciones sin error.

En vista de que el ruido en la señal W es suficiente para que la derivada numérica sea errónea; se aplica un filtro pasa-bajas del tipo Butterworth [37] debido a que presenta respuesta plana; es decir, en el rango de operación se mantiene constante casi hasta la frecuencia de corte, punto donde decrece con cierta pendiente función del orden del filtro; para este caso en particular, se aplica un filtro de Butterworth de tercer orden con frecuencia de corte $c_f = 60$ rad/s [38]. Se define la señal $\hat{W} = F(W)$, donde $F(\cdot)$ indica la operación del filtrado.

Las dos principales características de la señal $\hat{W}$ son primeramente la atenuación de las componentes de frecuencia mayor a la frecuencia de corte c_f del filtro, y la segunda es que $\hat{W}$ presenta un retardo τ_F respecto a W que está en función del orden del filtro empleado. Para el proceso de estimación de los parámetros, se requiere que los datos estén en fase; debido al retardo τ_F de $\hat{W}$, es necesario proporcionar el mismo retardo a la señal V para que ambas sigan en fase, por lo tanto se usará la señal $\hat{V} = F(V)$.

2.6.2. Derivación numérica

Como la señal $\hat{W}$ es discretizada con periodo de muestreo constante T , entonces $\hat{W}(t_k) = \hat{W}(kT)$ y puede calcularse numéricamente la derivada aplicando la forma centrada de orden $O(h^4)$ como [39]:

$$f'_0 \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}, \quad (2.87)$$

donde $f_i = \hat{W}(t_{k-i})$, $i = \overline{-2, 2}$ y $h = T$.

2.6.3. Estimación de parámetros

La ecuación (2.86) es lineal respecto a los parámetros y se puede escribir como

$$y = \varphi \Theta, \quad (2.88)$$

donde $y = \dot{W}$, $\varphi = [W \quad V \quad 1]$ y $\theta = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T$. Discretizando (2.88), se puede aplicar el algoritmo de estimación recursiva de parámetros por mínimos cuadrados con factor de olvido (algoritmo 2).

2.6.4. Implementación

La aplicación de la derivada numérica (2.87) requiere retardar $\tau_d = 2h$ la señal $\hat{W}$ para tener disponibles $\hat{W}(t_{k+1})$ y $\hat{W}(t_{k+2})$ en el instante t_k cuando se calcula la derivada. Como el estimador de parámetros no considera desfase de los datos, se propone la referencia temporal $\tilde{t}$ que está retrasada $2h + \tau_F$ respecto a la referencia original t como

$$\tilde{t} = t - \tau_F - \tau_d, \quad (2.89)$$

y en $\tilde{t}$ se realiza la estimación de los parámetros como

$$\tilde{y} = \tilde{\varphi} \tilde{\theta}, \quad (2.90)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \dot{W} = z^{-2} \dot{\hat{W}} = z^{-2} \frac{d}{dt} F(W), \\ \tilde{\varphi}_1 &= \tilde{W}^2 = z^{-2} \hat{W}^2 = z^{-2} F(W), \\ \tilde{\varphi}_2 &= \tilde{W} = z^{-2} \hat{W} = z^{-2} F(W), \\ \tilde{\varphi}_3 &= \tilde{V} = z^{-2} \hat{V} = z^{-2} F(V), \\ \tilde{\varphi}_4 &= 1. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Una representación gráfica de esta implementación se muestra en Fig. 2.9.

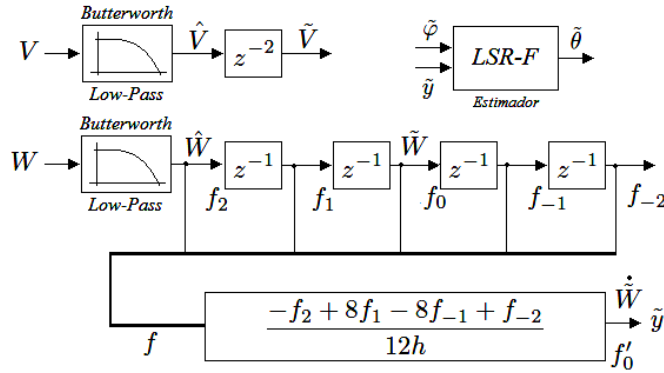
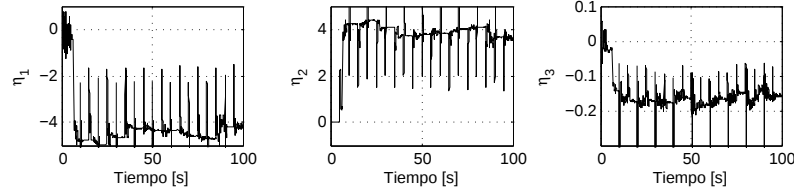


Figura 2.9: Estructura del estimador de parámetros con retardo.

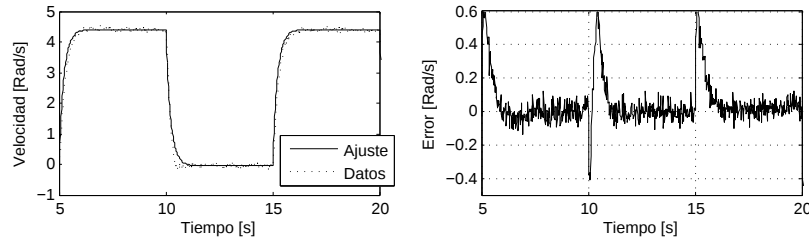
2.6.5. Resultados experimentales

A continuación, se muestra el resultado de la estimación de parámetros del motor DC. En Fig. 2.10(a) se muestran las gráficas de evolución de la estimación de parámetros realizando el experimento durante un intervalo $[0, 100]$ seg. con un factor de olvido $\lambda = 0.95$ y matriz de covarianza inicial $P_0 = 10^4 \mathbb{I}_3$. En Fig. 2.10(b) se muestra la validación del modelo por comparación directa con los datos experimentales ($\eta_1 = -4.13$, $\eta_2 = 3.91$, $\eta_3 = -0.162$) y una gráfica del error de predicción.

Es importante remarcar que el parámetro η_3 es pequeño en comparación con los parámetros η_1 y η_2 . Por la ecuación (2.86) se sabe que $\eta_3 = a_2 b_2 c_1 + b_1 c_2$, de la ecuación de la interfaz en la entrada (2.85a) y



(a) Evolución de la estimación de los parámetros η_1 , η_2 , η_3 considerando periodo de muestreo $T = 0.01$ seg., $\lambda = 0.95$ y $P_0 = 10^4 \mathbb{I}_3$.



(b) Izq.) Validación del modelo por comparación directa con los datos experimentales. Derecha) Error de predicción $e = \omega - \hat{\omega}$.

Figura 2.10: Estimación de parámetros para el motor DC con interfaces de entrada y salida.

la interfaz en la salida (2.85b) vemos que los términos a_2 y c_2 corresponden a los *offset* que las interfaces aportan; por lo tanto, que η_3 sea “pequeño” sugiere que los *offset* de las interfaces son pequeños o nulos. Para simplificar el modelo, basándonos en este razonamiento consideramos que $a_2 = c_2 = 0 \Rightarrow \eta_3 = 0$. Lo anterior no puede ser una pérdida de generalidad, ya que siempre es posible lograr que los *offset* sean nulos con la traslación (2.92a) donde se eligen a (2.92b) como cantidades de desplazamiento.

$$\tilde{v} = v - \delta^v, \quad \tilde{W} = W - \delta^W, \quad (2.92a)$$

$$\delta^v = a_2, \quad \delta^W = c_2. \quad (2.92b)$$

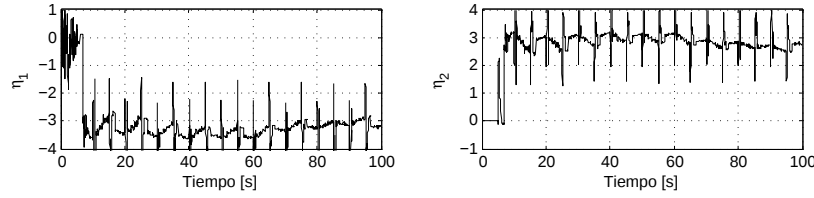
2.6.6. Estimación de parámetros considerando un modelo simplificado de la interfaz de entrada y salida

Considerando nuevamente las ecuaciones (2.85) y suponiendo que los *offset* de la interfaz de entrada y salida son nulos por la aplicación previa de la traslación (2.92); es posible simplificar el modelo (2.86) como:

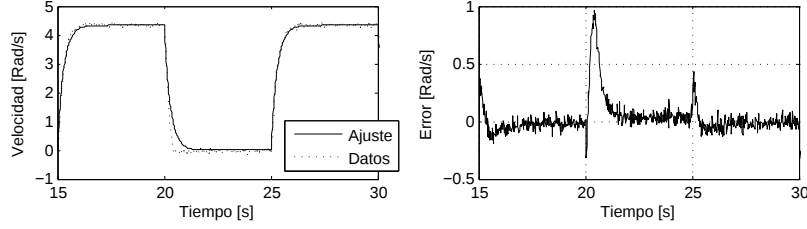
$$\dot{W} = -b_1 W + a_1 b_2 c_1 V = \eta_1 W + \eta_2 V, \quad (2.93)$$

donde $\eta_1 = -b$ y $\eta_2 = a_1 b_2 c_1$. Aplicando nuevamente todo lo descrito en la sección anterior, pero ésta vez definiendo $y = \dot{W}$, $\varphi = [W \ V]^T$ y $\theta = [\eta_1 \ \eta_2]^T$. La evolución de la estimación de parámetros se muestra en Fig. 2.11(a) y en Fig. 2.11(b) se presenta una gráfica del error de estimación y una comparación directa del modelo ajustado con $\eta_1 = -3.53$, $\eta_2 = 3.06$ y los datos experimentales.

Observe que en esta estimación la pérdida de grados de libertad pone de manifiesto una deficiencia en el modelo (2.84). En la gráfica del error de la figura 2.11(b), en el tiempo $t = 20$ s inicia un pico con



(a) Evolución de la estimación de los parámetros η_1 , η_2 , considerando periodo de muestreo $T = 0.01$ seg., $\lambda = 0.95$ y $P_0 = 10^4 \mathbb{I}_3$.



(b) Izq.) Validación del modelo por comparación directa con los datos experimentales. Derecha) Error de predicción $e = \omega - \hat{\omega}$.

Figura 2.11: Estimación de parámetros para el motor DC con interfaces simplificadas de entrada y salida.

magnitud cerca de 1, a diferencia de la gráfica del error de la figura 2.10(b) donde el error se mantiene acotado en 0.6, lo que hace evidente que el ajuste del modelo se hace más pobre debido a una no linealidad no considerada en el modelo: la planta presenta efectos de un torque elástico que provoca que la velocidad caiga rápidamente a cero (incluso por debajo de él) mientras que el modelo cae exponencialmente lo que provoca que en ese intervalo de transición el error se dispare. Sin embargo, el precio que se ha pagado puede compensarse con la facilidad con la que puede obtenerse una función de transferencia del modelo $\dot{W}(t) = \eta_1 W(t) + \eta_2 V(t) \rightarrow w(s)/v(s) = \eta_2/(s - \eta_1)$, algo que no puede realizarse tan sencillamente para el modelo $\dot{W}(t) = \eta_1 W(t) + \eta_2 V(t) + \eta_3$.

2.7. Estimación de parámetros del TRMS

En esta sección se aborda la estimación de parámetros del TRMS que es un objetivo principal de este trabajo; en esta sección se aplican directamente los programas computacionales y los dispositivos de hardware empleados y validados en las secciones anteriores. Con la finalidad de simplificar el proceso de estimación de parámetros, el TRMS se divide en tres subsistemas: los rotores, el movimiento en el plano vertical y el movimiento en el plano horizontal y se estiman los parámetros para cada subsistema por separado.

2.7.1. Los rotores con modelo de primer orden en ω

Los motores del TRMS se pueden modelar como motores de CD similares a los analizados en la sección anterior, sin embargo, éstos tienen acoplados en su eje una hélice, lo que modifica considerablemente el modelo. De aquí en adelante, el conjunto motor-hélice del TRMS será referido simplemente como *rotor*.

Tomando como base la plataforma computacional para la estimación del motor DC descrita en la

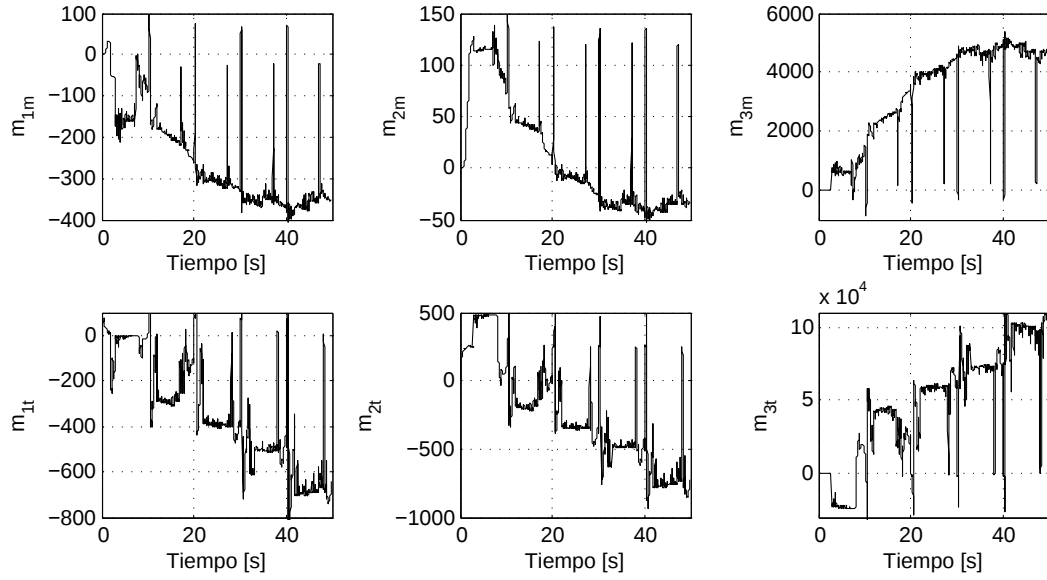


Figura 2.12: Evolución de la estimación de los parámetros de los rotores del TRMS. Arriba) Parámetros m_{1m} , m_{2m} , m_{3m} del rotor principal. Abajo) Parámetros m_{1t} , m_{2t} , m_{3t} del rotor de cola.

sección anterior, se procede a la estimación de parámetros de los rotores del TRMS; sin embargo, la plataforma no es suficiente por una seria deficiencia: éstos rotores no están equipados con sensores (excepto un sensor de temperatura), por lo que no se dispone de la curva de velocidad, necesaria para poder realizar la estimación.

Para poder realizar la estimación de los rotores, se propone el algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular ω , $\dot{\omega}$ que puede consultar en el apéndice A el cual consiste en la estimación de ω y $\dot{\omega}$ empleando un único sensor óptico que genera un pulso cada vez que una paleta de la hélice del rotor pasa frente a él. Con éste trabajo se puede acoplar el estimador de velocidad a los rotores y realizar la estimación de sus parámetros y finalmente retirar el estimador de ω , $\dot{\omega}$ pues su única utilidad es para el ajuste del modelo. De aquí en adelante, se asumirá el problema suponiendo que ω y $\dot{\omega}$ están disponibles.

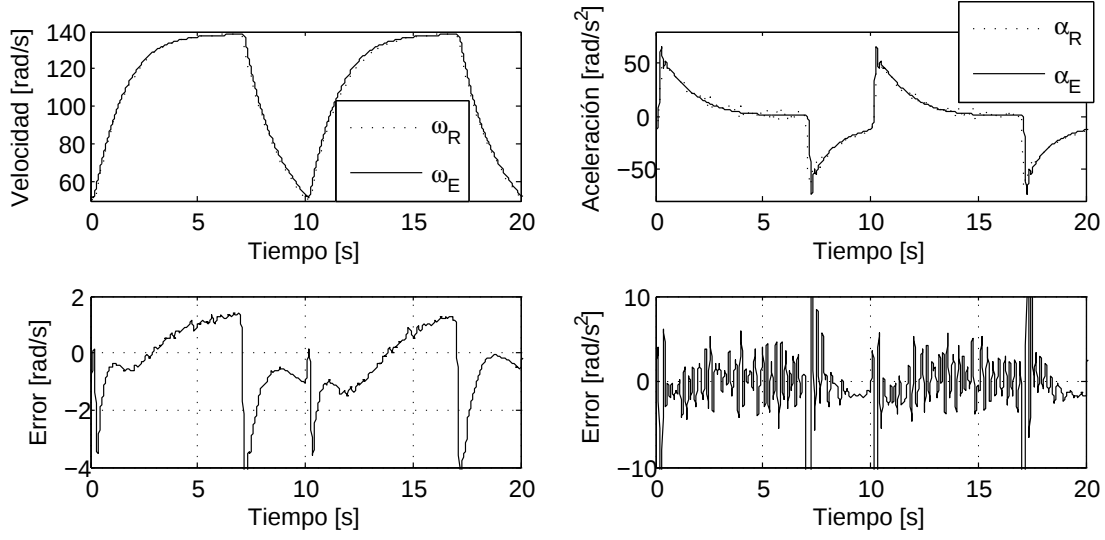
Los parámetros que se desean obtener son los correspondientes a las ecuaciones (2.94)³, donde los subíndices m , t hacen referencia al rotor principal (*main*) y al rotor de cola (*tail*).

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_m &= -d_m|\omega_m|\omega_m - b_m\omega_m + a_mv_m, \\ \dot{\omega}_t &= -d_t|\omega_t|\omega_t - b_t\omega_t + a_tv_t.\end{aligned}\tag{2.94}$$

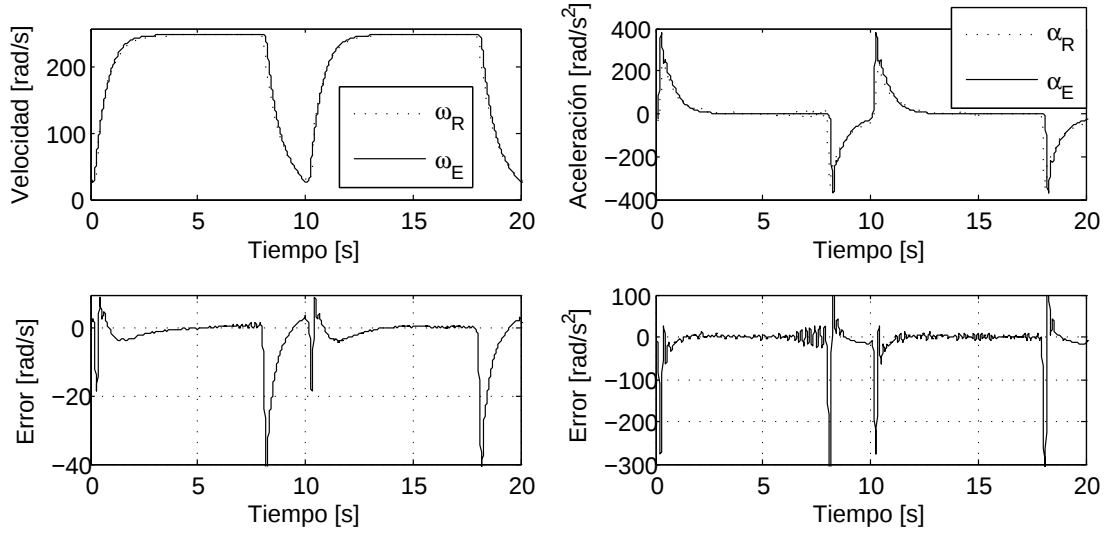
Realizando una estimación preliminar, se sabe que los parámetros $d_{m/t}$ son pequeños ($d_{m/t} \ll 1$) y por lo tanto, la estabilidad del algoritmo de estabilización puede verse comprometida debido a la operación de cantidades pequeñas que puedan rebasar la precisión computacional; sin embargo, un problema aún mayor es el hecho de que la información que se está procesando está contaminada con ruido generado por los sensores y por errores de cómputo; por esta razón es conveniente modificar los parámetros que el estimador va a calcular. Modificando el modelo como:

$$\begin{aligned}|\omega_{m/t}|\omega_{m/t} &= -\frac{1}{d_{m/t}}\dot{\omega}_{m/t} - \frac{b_{m/t}}{d_{m/t}}\omega_{m/t} + \frac{a_{m/t}}{d_{m/t}}v_{m/t}, \\ |\omega_{m/t}|\omega_{m/t} &= m_{1m/1t}\dot{\omega}_{m/t} + m_{2m/2t}\omega_{m/t} + m_{3m/3t}v_{m/t},\end{aligned}\tag{2.95}$$

³en el capítulo 1 se describe con más detalle el modelo.



(a) Arriba) Comparación directa del modelo ajustado del rotor principal con datos experimentales de velocidad y aceleración. Abajo) Error de predicción de velocidad $e_{\omega_m} = \omega_m - \hat{\omega}_m$ y aceleración $e_{\alpha_m} = \alpha_m - \hat{\alpha}_m$.



(b) Arriba) Comparación directa del modelo ajustado del rotor de cola con datos experimentales de velocidad y aceleración. Abajo) Error de predicción de velocidad $e_{\omega_t} = \omega_t - \hat{\omega}_t$ y aceleración $e_{\alpha_t} = \alpha_t - \hat{\alpha}_t$.

Figura 2.13: Validación de los modelos de los rotores del TRMS por comparación directa con los datos experimentales.

donde

$$d_{m/t} = -\frac{1}{m_{1m/1t}}, \quad b_{m/t} = -m_{2m/2t}d_{m/t}, \quad a_{m/t} = m_{3m/3t}d_{m/t}, \quad (2.96)$$

se pueden estimar los parámetros de (2.95) considerando:

$$\begin{aligned} y_{m/t} &= \varphi_{m/t} \Theta_{m/t}, \\ y_{m/t} &= |\omega_{m/t}| \omega_{m/t}, \\ \varphi_{m/t} &= [\dot{\omega}_{m/t} \quad \omega_{m/t} \quad v_{m/t}], \\ \Theta_{m/t} &= [m_{1m/1t} \quad m_{2m/2t} \quad m_{3m/3t}]^T, \end{aligned} \quad (2.97)$$

y finalmente obtener los parámetros de interés aplicando las ecuaciones (2.96).

La estimación de parámetros de la ecuación (2.95) no representa más que la misma dificultad que estimar los parámetros de la ecuación (2.94) debido a que únicamente se cambia la definición de los regresores, lo cuál no representan ningún esfuerzo adicional en la implementación del sistema de estimación.

En Fig. 2.12 se muestra la evolución de la estimación de parámetros para el rotor principal y rotor de cola respectivamente empleando $\lambda = 0.98$ y $P_0 = 10^4 \mathbb{I}_3$. En Fig. 2.13 se presentan gráficas de comparación directa del modelo ajustado y los datos experimentales y el error de predicción para el rotor principal y el rotor de cola respectivamente.

Aplicando el algoritmo de estimación de asíntotas 3, se obtienen los parámetros que mejor ajustan el modelo a los datos experimentales:

$$\begin{aligned} d_m &= 0.0029, & b_m &= 0.0904, & a_m &= 13.7026, \\ d_t &= 0.0020, & b_t &= 1, & a_t &= 150. \end{aligned} \quad (2.98)$$

2.7.2. Los rotores con modelo de primer orden en θ

En la subsección anterior se presentó un procedimiento para la estimación de parámetros de los rotores del TRMS considerando un modelo no lineal de primer orden en ω :

$$\dot{\omega} = -d|\omega|\omega - b\omega + av, \quad (2.99)$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ es la velocidad angular; sin embargo, los datos que se tienen disponibles corresponden a mediciones de posición angular θ ; ésta es la razón por la que en la subsección anterior se hayan tenido que realizar dos derivadas para obtener ω y $\dot{\omega}$.

En esta subsección se presenta una solución alternativa para estimar los parámetros de los rotores considerando un modelo no lineal de primer orden respecto a la posición:

$$\dot{\theta} = -d \int |\dot{\theta}| \dot{\theta} dt - b\theta + a \int v dt, \quad (2.100)$$

donde se asume que las condiciones iniciales son cero. Para este último modelo es evidente que solo se requiere una derivada para obtener $\dot{\theta}$. Un problema que salta a la vista es que la primera integral no se puede obtener analíticamente por lo que la implementación debe considerar la integración numérica para el primer término del lado derecho de (2.100).

Respecto a la integral de v en la ecuación (2.100), se considera el caso particular cuando v es un tren de pulsos cuadrados con periodo T , amplitud del pulso p y duración del pulso w como se puede apreciar en Fig. 2.14. Para la solución que se propone al cálculo de la integral de v , es necesario un contador de ciclos $k \in \mathbb{N}$ para la curva periódica v ; sabiendo que el periodo de v es T , entonces los ciclos pueden calcularse como:

$$k = \Xi \left(\frac{t}{T} \right), \quad (2.101)$$

donde t es el tiempo y $\Xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función que redondea el argumento al entero más cercano menor o igual al argumento, esta función es conocida como *redondeo hacia el infinito negativo*. En Matlab, la función $\Xi(\cdot)$ está definida y se invoca con el comando `floor(·)`.

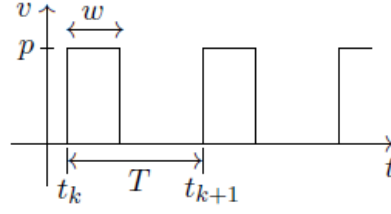


Figura 2.14: Caracterización de la señal tren de pulsos cuadrados.

Suponiendo $t_k = 0$ cuando $k = 0$, y ya que las condiciones iniciales son cero, entonces la integral de v en el intervalo $t = [0, w]$ es la recta con pendiente p que pasa por el origen:

$$y(t) = pt, \quad t = [0, w],$$

y cuyo valor máximo es $y(w) = pw =: y_w$. Para el intervalo $t = [w, T]$, la integral de la curva $v(t) = 0$ es la recta con pendiente cero con condición inicial $y(w) = y_w$:

$$y(t) = y_w, \quad t = [w, T].$$

Ahora cuando $k = 1$, la integral de v en el intervalo $t = [T, T + w]$ es la recta con pendiente p con condición inicial $y(T) = y_w$, para incluir esta condición inicial, se considera la ecuación de la recta conociendo un punto y la pendiente:

$$y(t) = pt - pT + y_w, \quad t = [T, T + w],$$

donde $y(t)$ alcanza el valor máximo $y(T + w) = p(T + w) - pT + y_w = pw + y_w = 2y_w$. Para el intervalo $t = [T + w, 2T]$, la integral de la curva $v(t) = 0$ es la recta con pendiente cero con condición inicial $y(T + w) = 2y_w$:

$$y(t) = 2y_w, \quad t = [T + w, 2T].$$

Finalmente, se puede apreciar una relación de recurrencia para la integral de v que se puede expresar como:

$$y(t) = \int v \, dt = \begin{cases} (k+1)y_w & \text{si } v = 0, \\ pt - kpT + ky_w = vt - kvT + ky_w & \text{si } v \neq 0. \end{cases} \quad (2.102)$$

Computacionalmente, la expresión (2.102) puede implementarse como se muestra en Fig. 2.15.

```
function y = IntV(t,v,P)
% t = Tiempo
% v = señal pulso
% P = Vector de parámetros:
%   P(1) = T,
%   P(2) = yw,
k = floor(t/P(1)); %Ciclos
if v == 0
    y = (k+1)*P(2);
else
    y = v*t + k*P(2) - k*v*P(1);
end
end
```

Figura 2.15: Implementación de la integral de un tren de pulsos cuadrados en una función Matlab.

Con lo anterior, se tiene lo necesario para poder realizar la estimación de los parámetros del modelo (2.99) con el ajuste de los datos experimentales $\{t_k, \theta_k\}$ al modelo (2.100) como:

$$\dot{\theta}_k = \begin{bmatrix} -\int_0^{t_k} |\dot{\theta}| \dot{\theta} dt & -\theta_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ b \\ a \end{bmatrix} = \varphi \Theta.$$

2.7.3. El movimiento en el plano vertical

Considerando el modelo del movimiento en el plano vertical que está dado por la ecuación (1.44a), la definición de variables

$$w_1 = |x_5| x_5, \quad w_2 = |x_6| x_6, \quad (2.103)$$

y considerando las variables de estado y parámetros descritos en §1.2.5; (1.44a) puede reescribirse como:

$$\dot{x}_2 = \eta_1 x_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1 + (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) w_1 + (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1) w_2 + \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1. \quad (2.104)$$

Se puede realizar la estimación de los parámetros η_i , $i = \overline{1, 8}$ por partes; aplicando simplificaciones físicamente realizables y eliminarlas consecutivamente hasta completar la estimación de los ocho parámetros. Primero se puede considerar los dos rotores apagados $w_1, w_2 = 0$ y sin movimiento en el plano horizontal $x_4 = 0$, con lo que la ecuación (2.104) se reduce a:

$$\dot{x}_2 = \eta_1 x_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1. \quad (2.105)$$

Observe que en la ecuación anterior no existe variable de entrada; es decir, el sistema no es excitable; sin embargo, para realizar la estimación es suficiente con las condiciones iniciales diferentes a las del sistema en reposo. Con el modelo (2.105), se pueden estimar los parámetros η_i $i = \overline{1, 3}$, donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 \Theta_1, \\ y_1 &= \dot{x}_2, \\ \varphi_1 &= [\phi_{11} \quad \phi_{12} \quad \phi_{13}] = [x_2 \quad \cos x_1 \quad \sin x_1], \\ \Theta_1 &= [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Una vez estimados los parámetros η_i $i = \overline{1, 3}$, se puede proceder a considerar movimiento en el plano horizontal $x_4 \neq 0$, y el modelo (2.104) se reduce a:

$$\dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 = \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1. \quad (2.107)$$

Observe que en la ecuación anterior, puede considerarse a x_4 como variable de entrada; sin embargo, como se pide que los rotores estén apagados $w_1, w_2 = 0$ se deben aplicar fuerza externas que provoquen tal movimiento. Con la ecuación (2.107), se puede estimar el parámetro η_6 , donde:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2 \Theta_2, \\ y_2 &= \dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1, \\ \varphi_2 &= [\phi_{21}] = [x_4^2 \sin 2x_1], \\ \Theta_2 &= [\eta_6]^T. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Ahora, una vez estimados los parámetros $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_6$, se considera que el rotor principal se enciende $w_1 \neq 0$ y la ecuación (2.104) se puede reescribir como:

$$\dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 = (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) w_1. \quad (2.109)$$

Con la ecuación anterior, se pueden estimar los parámetros η_4 y η_7 , donde:

$$\begin{aligned} y_3 &= \varphi_3 \Theta_3, \\ y_3 &= \dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1, \\ \varphi_3 &= [\phi_{31} \quad \phi_{32}] = [w_1 \quad x_4 \cos x_1 w_1], \\ \Theta_3 &= [\eta_4 \quad \eta_7]^T. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Finalmente, una vez estimados los parámetros $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_6, \eta_7$, se considera que el rotor de cola se enciende $w_2 \neq 0$ y la ecuación (2.104) se puede reescribir como:

$$\dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 - (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) w_1 = (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1) w_2. \quad (2.111)$$

Con la ecuación anterior, se pueden estimar los parámetros η_5 y η_8 , donde:

$$\begin{aligned} y_4 &= \varphi_4 \Theta_4, \\ y_4 &= \dot{x}_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 - (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) w_1, \\ \varphi_4 &= [\phi_{41} \quad \phi_{42}] = [w_2 \quad x_4 \cos x_1 w_2], \\ \Theta_4 &= [\eta_5 \quad \eta_8]^T. \end{aligned} \quad (2.112)$$

En Fig. 2.16 se muestran las gráficas correspondientes a la evolución de la estimación de los parámetros. Finalmente, aplicando el algoritmo de estimación de asíntotas 3 se obtiene los valores numéricos:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -0.011, & \eta_2 &= -0.235, & \eta_3 &= -0.97, & \eta_4 &= 4.13 \times 10^{-5}, \\ \eta_5 &= 1.6 \times 10^{-6}, & \eta_6 &= -0.42, & \eta_7 &= 2.17 \times 10^{-5}, & \eta_8 &= 0.4 \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

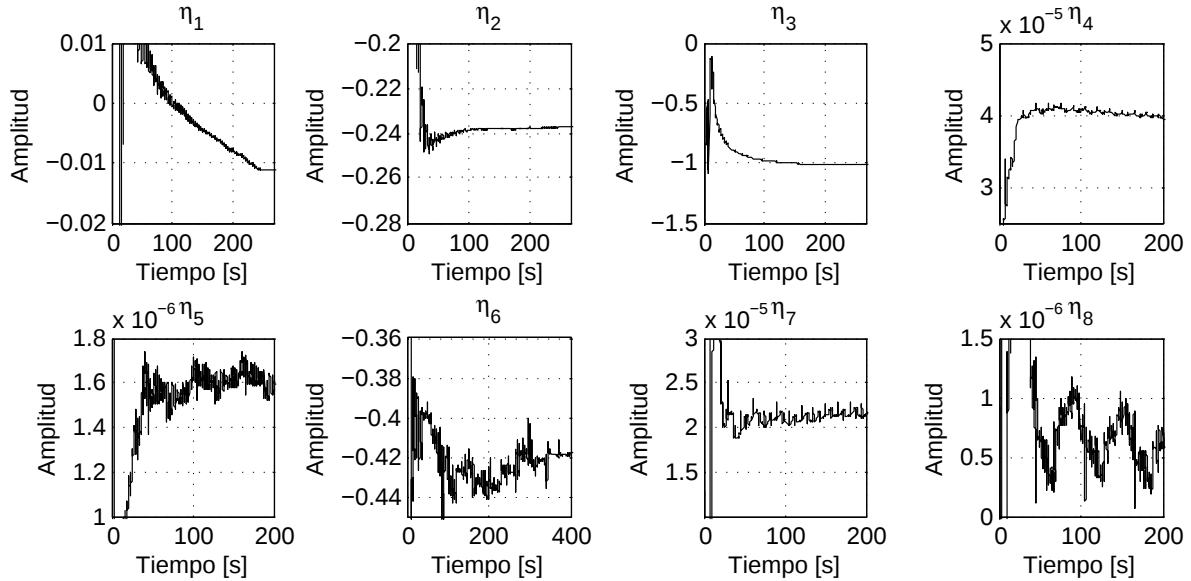


Figura 2.16: Estimación de los parámetros η_i del TRMS correspondientes al movimiento en el plano vertical

2.7.4. El movimiento en el plano horizontal

Considerando la ecuación (1.44b), la definición de los estados $x_1 = \theta_v$, $x_3 = \theta_h$, $x_4 = \Omega_h$ y las variables (2.103); (1.44b) puede reescribirse como:

$$\dot{x}_4 = \frac{-\mu_h x_4 - k_p x_3 + (l_m k_{mn} w_1 + l_t k_t w_2) \cos x_1}{D \cos^2 x_1 + E \sin^2 x_1 + F}. \quad (2.114)$$

De manera similar a la sección anterior, se estimarán los parámetros aplicando simplificaciones físicamente realizables y eliminarlas consecutivamente hasta terminar la estimación de todos los parámetros. Primero se puede considerar $w_1, w_2, x_1 = 0$ (los rotores apagado y el TRMS fijo en la posición horizontal) reduciendo el modelo a:

$$\dot{x}_4 = \frac{-\mu_h x_4 - k_p x_3}{D + F} = \rho_1 x_4 + \rho_2 x_3, \quad (2.115)$$

donde $\rho_1 = -\frac{\mu_h}{D+F}$ y $\rho_2 = -\frac{k_p}{D+F}$. El sistema, con esta simplificación, no es exitable; sin embargo para la estimación es suficiente considerar condiciones iniciales distintas al punto de reposo. Con la ecuación (2.115) se puede estimar los parámetros ρ_1 y ρ_2 , donde:

$$\begin{aligned} y_5 &= \varphi_5 \Theta_5, \\ y_5 &= \dot{x}_4, \\ \varphi_5 &= [\phi_{51} \quad \phi_{52}] = [x_4 \quad x_3], \\ \Theta_5 &= [\rho_1 \quad \rho_2]^T. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Una vez estimados los parámetros ρ_1 y ρ_2 , se considera encender los rotores $w_1, w_2 \neq 0$, con lo que (2.114) se puede reescribir como:

$$\dot{x}_4 - \rho_1 x_4 - \rho_2 x_3 = \frac{l_m k_{mn} w_1 + l_t k_t w_2}{D + F} = \rho_3 w_1 + \rho_4 w_2, \quad (2.117)$$

donde $\rho_3 = \frac{l_m k_{mn}}{D+F}$ y $\rho_4 = \frac{l_t k_t}{D+F}$. Con la ecuación (2.117) se pueden estimar los parámetros ρ_3 y ρ_4 , donde

$$\begin{aligned} y_6 &= \varphi_6 \Theta_6, \\ y_6 &= \dot{x}_4 - \rho_1 x_4 - \rho_2 x_3, \\ \varphi_6 &= [\phi_{61} \quad \phi_{62}] = [w_1 \quad w_2], \\ \Theta_6 &= [\rho_3 \quad \rho_4]^T. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Ahora con los parámetros ρ_i , $i = \overline{1,4}$, se considera el movimiento en el plano vertical $x_1 \neq 0$, con lo que la ecuación (2.114) se puede escribir como:

$$(D \cos^2 x_1 + E \sin^2 x_1 + F) \dot{x}_4 = -\mu_h x_4 - k_p x_3 + (l_m k_{mn} w_1 + l_t k_t w_2) \cos x_1, \quad (2.119)$$

dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por $D + F$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{D \cos^2 x_1 + E \sin^2 x_1 + F}{D + F} \dot{x}_4 &= \rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + (\rho_3 w_1 + \rho_4 w_2) \cos x_1 \\ &= \rho_5 \dot{x}_4 \cos^2 x_1 + \rho_6 \dot{x}_4 \sin^2 x_1 + \rho_7 \dot{x}_4, \end{aligned} \quad (2.120)$$

donde $\rho_5 = \frac{D}{D+F}$, $\rho_6 = \frac{E}{D+F}$ y $\rho_7 = \frac{F}{D+F}$. Con la ecuación (2.120) se pueden estimar los parámetros ρ_i , $i = \overline{5, 7}$, donde:

$$\begin{aligned} y_7 &= \varphi_7 \Theta_7, \\ y_7 &= \rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + (\rho_3 w_1 + \rho_4 w_2) \cos x_1, \\ \varphi_7 &= [\phi_{71} \quad \phi_{72} \quad \phi_{73}] = [\dot{x}_4 \cos^2 x_1 \quad \dot{x}_4 \sin^2 x_1 \quad \dot{x}_4], \\ \Theta_4 &= [\rho_5 \quad \rho_6 \quad \rho_7]^T. \end{aligned} \quad (2.121)$$

En Fig. 2.17 se muestran las gráficas correspondientes a la evolución de la estimación de los parámetros ρ_i , $i = \overline{1, 7}$.

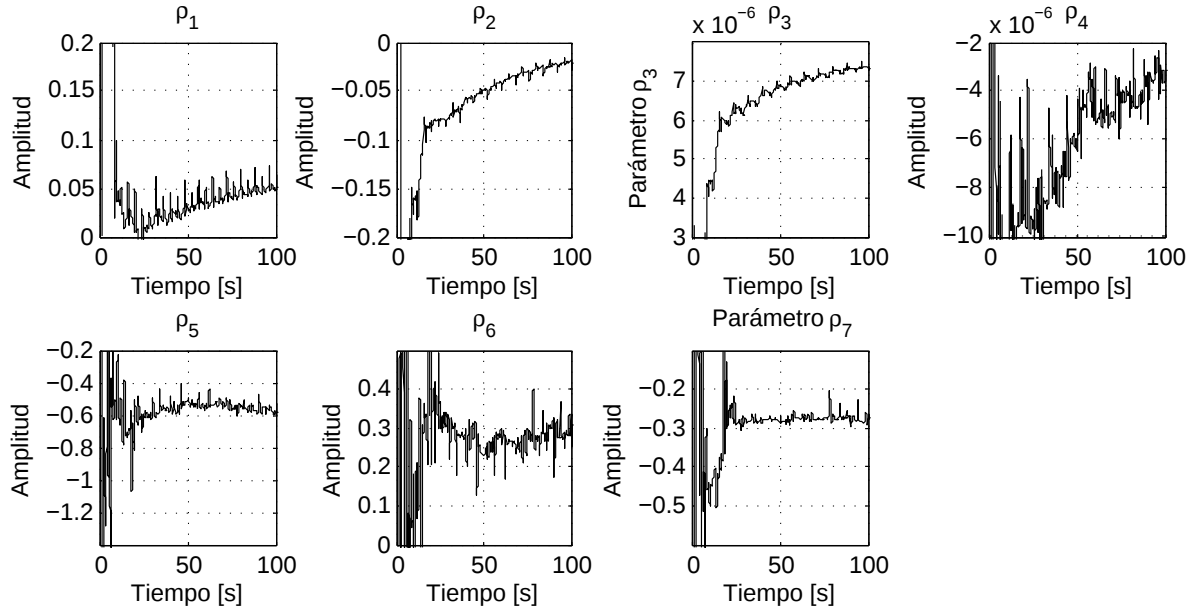


Figura 2.17: Estimación de parámetros ρ_i del TRMS correspondientes al movimiento en el plano horizontal.

Finalmente, aplicando el algoritmo de estimación de asíntotas 3 encontramos los parámetros que mejor ajustan al modelo del TRMS a los datos experimentales:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.05, & \rho_2 &= -0.022, & \rho_3 &= 7.3 \times 10^{-6}, & \rho_4 &= -4 \times 10^{-6}, \\ \rho_5 &= -0.6, & \rho_6 &= 0.3, & \rho_7 &= -0.33. \end{aligned} \quad (2.122)$$

En el cuadro 2.1 se agrupan los parámetros del modelo del TRMS (1.46) y sus correspondientes valores numéricos estimados. Los objetivos de esta estimación son varios, entre los que destacan:

- Simulación; para realizar análisis por computadora obteniendo respuestas más rápidas (el resultado de la simulación de cinco minutos se tiene en menos de un segundo). Basándose en el programa en Matlab-Simulink presentado en §1.2.7 solo se definen los parámetros con los valores numéricos del cuadro 2.1.
- Diseño; para estudiar las propiedades dinámicas que presenta el TRMS y posteriormente diseñar controladores los cuales la sintonización está en función de los parámetros.

- Modelo de referencia; para el control adaptativo. Se propone como modelo de referencia la estructura las ecuaciones (1.46) con los parámetros ajustados del cuadro 2.1.

η_1	-0.011	η_2	-0.235	η_3	-0.97	η_4	4.13×10^{-5}
η_5	1.6×10^{-6}	η_6	-0.42	η_7	2.17×10^{-5}	η_8	0.4×10^{-6}
ρ_1	0.05	ρ_2	-0.022	ρ_3	7.3×10^{-6}	ρ_4	-4×10^{-6}
ρ_5	-0.6	ρ_6	0.3	ρ_7	-0.33		
d_m	0.0029	b_m	0.0904	a_m	13.7026		
d_t	0.0020	b_t	1	a_t	150		

Cuadro 2.1: Parámetros del TRMS.

Control Adaptativo

Es más fácil viajar en un avión,
incluso pilotarlo, que entender
por qué puede volar.

J. Von Neumann.

EN el contexto del control automático el término *adaptativo* se refiere a la facultad de cambiar el comportamiento o parámetros del control en respuesta a cambios del sistema controlado. Un regulador adaptativo será aquel que pueda modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del sistema y/o las perturbaciones. La retroalimentación fundamenta la efectividad del control adaptativo que lo habilita de reaccionar a los cambios del estado o salida del proceso (los cuales pueden venir motivados por perturbaciones o también cambios en la dinámica del proceso) actuando de manera que dicho estado o salida se mantenga controlado.

En general se acepta que el *control adaptativo* es un tipo de control no lineal en el que el estado del proceso puede ser separado en dos escalas de tiempo que evolucionan a diferente velocidad. La escala lenta corresponde a los cambios en los parámetros del regulador y la escala rápida a la dinámica del bucle ordinario de retroalimentación. En la figura 3.1 el flujo indicado por la línea gruesa corresponde al bucle rápido y las líneas delgadas corresponden al bucle lento.

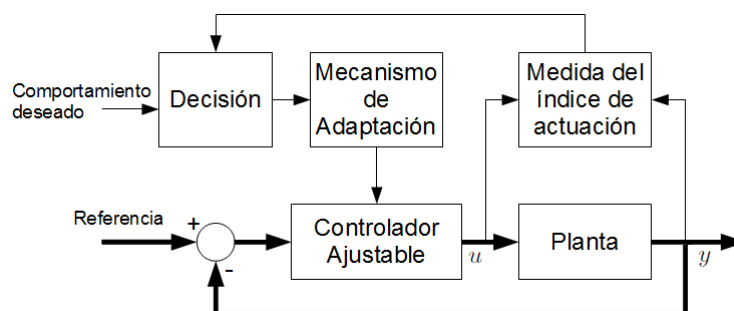


Figura 3.1: Configuración típica de un control adaptativo.

El control adaptativo es un tipo específico de control donde el proceso es controlado en lazo cerrado, y donde el conocimiento sobre las características del sistema son obtenidas mientras el sistema está en

operación (*en línea*). Basados en la información actualizada obtenida durante la operación normal, se realizan intervenciones específicas en el lazo de control para alcanzar el rendimiento deseado. Las intervenciones pueden ser por cambio de:

1. señales, adaptación a las señales;
2. parámetros, adaptación a los parámetros;
3. estructura, adaptación a la estructura.

Generalmente, varias combinaciones de los tipos de adaptación anterior son posibles, pero éste trabajo está enfocado a la adaptación a los parámetros. Los parámetros, en este contexto, son considerados elementos observables no controlables; en contraste, las variables de estado son elementos observables y controlables.

El control adaptativo se aplica a los procesos que cambian su dinámica en condiciones normales de operación o que están sujetos a perturbaciones estocásticas. Razones para emplear control adaptativo son:

- Dinámica variable de la planta.
- Carácter variable de las perturbaciones.
- Eficiencia.

Generalmente, el control de procesos con dinámica variable no es fácil. En la actualidad existen dos posibles soluciones para tal situación:

- Control adaptativo.
- Control robusto.

El control adaptativo es usado donde los parámetros del proceso cambian durante la operación y no es posible conocer o establecer anticipadamente dichas situaciones. En estas circunstancias, debe descartarse el supuesto de procesos invariantes en el tiempo. La solución se ha de buscar en una forma específica de control donde la estimación de los parámetros y el diseño del regulador deban realizarse en línea durante la operación normal del sistema de control.

3.1. Necesidad del control adaptativo

Se sabe que los parámetros de un proceso pueden variar debido a:

- No linealidad de los actuadores.
- Cambios en las condiciones de operación del proceso.
- Acción de perturbaciones no estacionarias sobre el proceso.

Los controladores convencionales con parámetros fijos no son capaces de ajustarse a los cambios experimentados por el proceso incluso haciendo uso de la retroalimentación para reducir la sensibilidad a las variaciones de los parámetros.

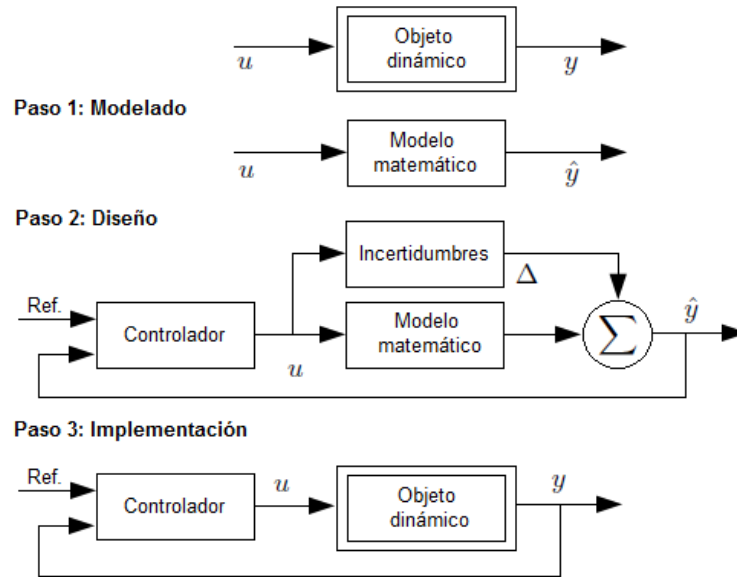


Figura 3.2: Pasos en el diseño de sistemas de control.

Si las incertidumbres sobre los parámetros del proceso están acotadas, entonces es posible diseñar *controladores robustos* pagando con el incremento en la complejidad del controlador. Para el uso de este enfoque es necesario:

1. Conocer la estructura del proceso con suficiente precisión.
2. Tener limitadas las variaciones de los parámetros.

Si alguno de los dos puntos anteriores, o ambos, no es posible satisfacer, entonces la única posibilidad que se tiene para resolver el problema es el uso de *controladores adaptativos*.

3.2. Diseño de sistemas de control

Una *planta* es cualquier proceso, sistema u objeto dinámico que se caracteriza por un cierto número de entradas u y salidas y , como se muestra en la parte superior de Fig. 3.2. La planta procesa la entrada u para producir la salida y . La tarea del diseño de control es elegir la entrada $u(t)$ para que la salida $y(t)$ satisfaga los requerimientos de rendimiento dados. Debido a que el proceso de la planta suele ser complejo, es decir, podría estar compuesto por varias partes mecánicas, electrónicas, hidráulicas, etc., la correcta elección de $u(y)$ no es, en general, sencilla. De acuerdo con [25], los pasos en el diseño del control son lo que se muestran en Fig. 3.2 y que se explican a continuación.

3.2.1. Paso 1. Modelado

La finalidad es entender el proceso de funcionamiento de la planta, donde ésta toma una señal de entrada $u(t)$ y produce la salida de respuesta $y(t)$, hasta el punto en que pueda describirse en la forma de algunas ecuaciones matemáticas. Estas ecuaciones constituyen el modelo matemático de la planta.

Un modelo de planta exacto debe producir la respuesta de salida igual a la planta, siempre que la entrada para el modelo y condiciones iniciales son exactamente las mismas que las de la planta. Sin embargo, la complejidad de la mayoría de las plantas físicas hace que el desarrollo de modelos exactos no sea conveniente o incluso sea imposible. Pero incluso si el modelo exacto de la planta está disponible, su dimensión es probablemente infinita, y su descripción no lineal o que cambia con el tiempo llegan al punto en que su utilidad, desde el punto de vista de control, es mínima o ninguna.

El modelo de la planta puede ser creado a partir de leyes físicas o por el procesamiento de los datos de la entrada y salida obtenidos mediante la realización de varios experimentos. En la mayoría de los casos es suficiente un modelo simplificado que aporte solo la información necesaria para los propósitos del diseño del control. Un modelo simple suele conducir a un controlador simple, que es más fácil de comprender, diseñar e implementar y, con frecuencia, más confiable para fines prácticos.

Algunas de las aproximaciones más utilizadas para obtener un modelo simplificado son:

1. Linealización alrededor de los puntos de operación,
2. Técnicas de reducción del orden del modelo.

En la primera técnica de simplificación, se obtiene un modelo simple que es válido alrededor del punto de operación y es posible linealizar alrededor de varios puntos de operación teniendo varios modelos simplificados válidos en esos puntos de operación. La linealización puede lograrse mediante expansión en series de Taylor, ajuste de datos experimentales a un modelo lineal, etc. En la segunda técnica de simplificación, pequeños efectos y fenómenos fuera del rango de frecuencias de interés son ignoradas conduciendo a un modelo de orden inferior; aquí figuran principalmente las técnicas de perturbación regular y singular. En general, la tarea del modelado de la planta implica una buena comprensión de la planta, de los requerimientos de desempeño y, adicionalmente, experiencia.

3.2.2. Paso 2. Diseño del controlador

Una vez que el modelo de la planta está disponible, se procede con el diseño del controlador. El controlador es diseñado para cumplir los requisitos de rendimiento para el modelo de la planta. Si el modelo es una buena aproximación de la planta, entonces se espera que el desempeño del controlador sea muy similar tanto para el modelo como a la planta misma.

Debido a que el modelo de planta es siempre una aproximación, el efecto de cualquier discrepancia entre la planta y el modelo provocará que el rendimiento real del controlador no se conozca hasta que el controlador sea aplicado a la planta. Sin embargo, se puede dar un paso intermedio y analizar las propiedades del controlador incluyendo una clase de incertidumbres denota por Δ que es probable que aparezcan en la planta.

Si Δ representa la mayor parte de los fenómenos no modelados, su representación en términos de ecua-

ciones matemáticas no es posible. Su caracterización, sin embargo, en términos de algunos límites conocidos puede ser posible en muchas aplicaciones. Al considerar la existencia de una clase general de incertidumbres Δ que es probable que se presente en la planta, es posible modificar o rediseñar el controlador para que éste sea menos sensible a dichas incertidumbres, es decir, para ser más robusto con respecto a Δ . Este análisis de robustez y rediseño mejora la posibilidad de una implementación exitosa.

3.2.3. Paso 3. Implementación

En este paso, un controlador diseñado, que ha demostrado que cumplen los requisitos de desempeño para el modelo de la planta y es robusto con respecto a las posibles incertidumbres Δ , está listo para ser aplicado a la planta. La aplicación se puede hacer usando una computadora digital. Cuestiones, tales como el tipo de computadora disponible, el tipo de dispositivos de interfaz entre el equipo y la planta, herramientas de software, etc., es necesario considerar a priori. La velocidad del ordenador y limitaciones de precisión puede imponer restricciones en la la complejidad del controlador, que puede obligar a regresar al paso 2 o incluso al paso 1 para llegar a un controlador simple sin violar los requisitos de rendimiento.

Otro aspecto importante de la implementación es el ajuste o calibración final conocida como *puesta a punto o sintonización* del controlador para mejorar el rendimiento o para compensar las incertidumbres que no se tomaron en cuenta durante el proceso de diseño. La sintonía se hace, por lo general, por ensayo y error, y depende mucho de la experiencia y la intuición.

3.3. Control adaptativo por modelo de referencia (MRAS)

Los sistemas adaptativos por modelo de referencia (Model-Reference Adaptive Systems, *MRAS*) fueron diseñados primeramente para sistemas continuos por minimización de un índice de actuación, siendo dicho índice la integral del error al cuadrado [24]. Ésta regla de diseño fue propuesta por Whitaker (1958) y es conocida como la *regla MIT*¹.

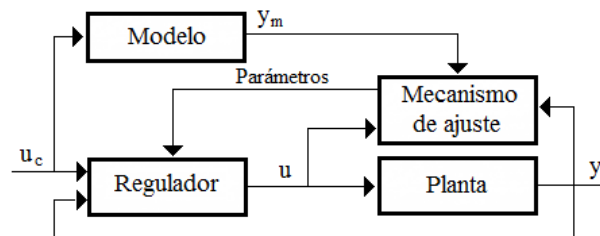


Figura 3.3: Diagrama de bloques típico del controlador adaptativo con modelo de referencia.

En cuanto a las configuraciones posibles con modelo de referencia, la más usual es la que se ilustra en Fig. 3.3. En la literatura existen básicamente tres enfoques para el análisis y diseño de un MRAS [23]:

¹porque el trabajo fue realizado en el laboratorio de instrumentación (ahora laboratorio Draper) del *Massachusetts Institute of Technology* (MIT)

- el enfoque del gradiente,
- funciones de Lyapunov,
- teoría de pasividad.

El método del gradiente fue usado por Whitaker en su trabajo original de MRAS. Este enfoque es basado en el supuesto de que los parámetros cambian más lentamente que las otras variables del sistema. Este supuesto, que admite tratamiento cuasi-estacionario, es esencial para el cómputo de las derivadas de sensibilidad que son necesarias en el mecanismo de adaptación.

El enfoque del gradiente no resultará necesariamente en un sistema estable en lazo cerrado. Esta observación inspira la aplicación de la teoría de estabilidad. La teoría de estabilidad de Lyapunov y la teoría de pasividad han sido usadas para modificar los mecanismos de adaptación.

Para un regulador con parámetros ajustables como el mostrado en la figura 3.3 el método de control adaptativo por modelo de referencia da un enfoque general para el ajuste de parámetros de una función de transferencia en lazo cerrado que buscará igualar la salida del proceso a la salida del modelo prescrito. Esto es conocido como el problema de *seguimiento de modelo*.

3.4. MRAS basado en el enfoque del gradiente

En éste esquema de ajuste de parámetros, usualmente llamada *regla MIT*, se busca cambiar los parámetros del regulador de tal forma que $y - y_m = e \rightarrow 0$. Considerando el criterio

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2, \quad (3.1)$$

donde θ es el vector de parámetros del regulador. Deseamos que el vector de parámetros θ cambie en el tiempo en la dirección del gradiente negativo del funcional (3.1), por lo que la regla de ajuste de parámetros puede escribirse como

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -\gamma e \nabla_{\theta} e, \quad (3.2)$$

donde la derivada $\partial e / \partial \theta = \nabla_{\theta} e$ y la constante γ se conocen como *derivada de sensibilidad* y *ganancia de adaptación* respectivamente.

3.4.1. Modificaciones a la regla de ajuste

La velocidad de decrecimiento de la regla (3.2) es determinada por la ganancia de adaptación γ y la magnitud de la señal de referencia. Esta regla de adaptación de parámetros se puede insensibilizar a la amplitud de la señal de comando mediante un proceso de normalización:

$$\dot{\theta} = -\gamma \frac{e \nabla_{\theta} e}{\alpha + (\nabla_{\theta} e)^T \nabla_{\theta} e}, \quad (3.3)$$

donde el parámetro $\alpha > 0$ es introducido con la finalidad de evitar una división por cero. Como una precaución extra se introduce una función de saturación para garantizar que la velocidad de ajuste de parámetros sea

siempre igual o menor que un límite dado, finalmente:

$$\dot{\theta} = -\gamma \text{sat} \left\{ \frac{e \nabla_{\theta} e}{\alpha + (\nabla_{\theta} e)^T \nabla_{\theta} e}, \beta \right\}, \quad \text{donde} \quad \text{sat} \{x, \beta\} = \begin{cases} -\beta & x < -\beta, \\ x & |x| \leq \beta, \\ \beta & x > \beta. \end{cases} \quad (3.4)$$

3.4.2. MRAS por adaptación de ganancia

Considerando al problema de ajuste de ganancia θ para la ecuación (3.5a) y el modelo de referencia (3.5b):

$$y(t) = G(p)\theta u_c, \quad (3.5a)$$

$$y_m(t) = G(p)\theta_m u_c, \quad (3.5b)$$

$$G(p) = C(p\mathbb{I} - A)^{-1}B; \quad p = \frac{d}{dt}, \quad (3.5c)$$

donde u_c es la señal de comando, y_m la salida del modelo, y la salida del proceso, θ un parámetro ajustable del regulador y $G(p)$ representa la dinámica del sistema en lazo cerrado. Debe resaltarse que $G(p)$ debe ya ser estable, por lo que se supone que $G(p) = G_s(p)/(1 + H(p)G_s(p))$, donde $G_s(p)$ es el modelo del sistema y está en lazo cerrado retroalimentado con $H(p)$. Definiendo el error como

$$e = y - y_m = G(p)\theta u_c - G(p)\theta_m u_c = G(p)(\theta - \theta_m)u_c, \quad (3.6)$$

y aplicando (3.2) se obtiene:

$$\dot{\theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{y_m}{\theta_m} = -\Gamma e y_m, \quad \text{donde } \Gamma = \frac{\gamma}{\theta_m}. \quad (3.7)$$

3.4.3. MRAS para un sistema de primer orden

Consideraremos al sistema descrito por (3.8a), al modelo de referencia (3.8b) y el error (3.8c):

$$\dot{y} = -ay + bu, \quad (3.8a)$$

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m u_c, \quad (3.8b)$$

$$e = y - y_m, \quad (3.8c)$$

se desea que $(\dot{y}, y) \rightarrow (\dot{y}_m, y_m)$, por lo que para la señal de control u se tiene:

$$-ay + bu = -a_m y_m + b_m u_c \Rightarrow u = \alpha y + \beta u_c = [y \ u_c] \theta, \quad (3.9)$$

donde $\theta = [\alpha \ \beta]^T$, $\alpha = \frac{a-a_m}{b}$ y $\beta = \frac{b_m}{b}$. Sustituyendo (3.9) en (3.8a) se obtiene la salida del sistema como

$$\dot{y} = -ay + b(\alpha y + \beta u_c) \Rightarrow y = \frac{b\beta u_c}{p + a - b\alpha} =: \frac{\eta}{\delta}, \quad (3.10)$$

y aplicando (3.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} \frac{b\eta}{\delta^2} & \frac{\eta}{\beta\delta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{by}{\delta} & \frac{\eta}{\beta\delta} \end{bmatrix}^T = \frac{b}{\delta} \begin{bmatrix} y \\ u_c \end{bmatrix}, \\ \delta &= p + a - b\alpha = p + a_m, \\ \dot{\theta} &= -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{b}{p + a_m} \begin{bmatrix} y \\ u_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4.4. MRAS para un sistema de orden n

Suponga que la dinámica del sistema puede ser representada por (3.12a) y se desea que siga al modelo de referencia (3.12b).

$$\overset{(n)}{y} + a_n \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_2 \dot{y} + a_1 y = b_1 u + b_0, \quad (3.12a)$$

$$\overset{(n)}{y}_m + a_n^m \overset{(n-1)}{y}_m + \dots + a_2^m \dot{y}_m + a_1^m y_m = b_1^m u_c + b_0^m. \quad (3.12b)$$

Definiendo los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_m$ como

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_1^m \\ a_2^m \\ \vdots \\ a_n^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} y_m \\ \dot{y}_m \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y}_m \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

se puede reescribir (3.12) como

$$\overset{(n)}{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b_1 u + b_0, \quad (3.14a)$$

$$\overset{(n)}{y}_m + \mathbf{a}_m^T \mathbf{x}_m = b_1^m u_c + b_0^m. \quad (3.14b)$$

Como se desea que $(\overset{(n)}{y}, \mathbf{x}) \rightarrow (\overset{(n)}{y}_m, \mathbf{x}_m)$ entonces:

$$-\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b_1 u + b_0 = -\mathbf{a}_m^T \mathbf{x}_m + b_1^m u_c + b_0^m, \quad (3.15)$$

con lo que se deduce la señal de control:

$$u = \frac{1}{b_1} (\mathbf{a}^T - \mathbf{a}_m^T) \mathbf{x} + \frac{b_1^m}{b_1} u_c + \frac{b_0^m - b_0}{b_1} = \theta^T \mathbf{x} + \theta_{n+1} u_c + \theta_{n+2}, \quad (3.16)$$

donde $\theta = \frac{1}{b_1} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_m)$, $\theta_{n+1} = \frac{b_1^m}{b_1}$ y $\theta_{n+2} = \frac{b_0^m - b_0}{b_1}$. Definiendo el vector de parámetros Θ como:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta_{n+1} \\ \theta_{n+2} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

y sustituyendo la señal de control (3.16) en (3.14a), se tiene que:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} &= b_1 \{ \theta^T \mathbf{x} + \theta_{n+1} u_c + \theta_{n+2} \} + b_0, \\ \overset{(n)}{y} + (\mathbf{a}^T - b_1 \theta^T) \mathbf{x} &= b_1 \theta_{n+1} u_c + b_1 \theta_{n+2} + b_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Definiendo el vector $\mathbb{P}$ como

$$\mathbb{P} = [p^0 \quad p^1 \quad p^2 \quad \dots \quad p^{n-1}]^T, \quad p^k = \frac{d^k}{dt^k}. \quad (3.19)$$

se puede reescribir el vector $\mathbf{x}$ como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \dots & \overset{(n)}{y} \end{bmatrix}^T = \mathbb{P} y, \quad (3.20)$$

con lo que las ecuaciones (3.18) se pueden reescribir como

$$(p^n + (\mathbf{a} - b_1 \theta)^T \mathbb{P}) y = b_1 \theta_{n+1} u_c + b_1 \theta_{n+2} + b_0, \quad (3.21)$$

y despejando y de la ecuación (3.21) se tiene:

$$y = \frac{b_1 \theta_{n+1} u_c + b_1 \theta_{n+2} + b_0}{p^n + (\mathbf{a} - b_1 \theta)^T \mathbb{P}} =: \frac{\eta}{\delta}. \quad (3.22)$$

Definiendo el error como $e = y - y_m$ y aplicando (3.2), se obtiene:

$$\dot{\Theta} = -\gamma e \nabla_{\Theta} e = -\gamma e \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial \theta}^T & \frac{\partial e}{\partial \theta_{n+1}}^T & \frac{\partial e}{\partial \theta_{n+2}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.23)$$

donde

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = -\frac{\eta}{\delta^2} (-b_1) \mathbb{P} = \frac{b_1}{\delta} \mathbb{P} y = \frac{b_1}{\delta} \mathbf{x}, \quad \frac{\partial e}{\partial \theta_{n+1}} = \frac{b_1}{\delta} u_c, \quad \frac{\partial e}{\partial \theta_{n+2}} = \frac{b_1}{\delta}, \quad (3.24)$$

que permite escribir (3.23) como

$$\dot{\Theta} = -\gamma e \frac{b}{\delta} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u_c \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Es posible simplificar a δ como

$$\delta = p^n + (\mathbf{a} - b\theta)^T \mathbb{P} = p^n + \left(\mathbf{a} - b \frac{1}{b} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_m) \right)^T \mathbb{P} = p^n + (\mathbf{a} - \mathbf{a} + \mathbf{a}_m)^T \mathbb{P} = p^n + \mathbf{a}_m^T \mathbb{P},$$

entonces (3.25) se puede escribir como:

$$\dot{\Theta} = -\gamma e \frac{b}{p^n + \mathbf{a}_m^T \mathbb{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u_c \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

3.5. MRAS basado en teoría de estabilidad de Lyapunov

La regla de ajuste de parámetros por gradiente negativo del error visto en la sección 3.4 consiste en encontrar una ley de ajuste de parámetros tal que garantice que el error vaya a cero. La idea fundamental en esta sección es que se garantice que la dinámica del error sea estable en sentido de Lyapunov.

3.5.1. MRAS por adaptación de ganancia

Considere el problema de ajuste de una ganancia θ del sistema representado por (3.5a) y al modelo de referencia (3.5b). Se define al error como $e = y - y_m = G(p)\theta u_c - G(p)\theta_m u_c = G(p)(\theta - \theta_m)u_c$ cuya representación en el espacio de estados es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\theta - \theta_m)u_c = Ax + B\varphi u_c, \quad \text{donde } \varphi = \theta - \theta_m, \\ e &= Cx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si el sistema homogéneo $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable, entonces existen matrices $P, Q > 0$ tales que $A^T P + PA = -Q$. Elijiendo (3.28) como función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (\gamma x^T P x + \varphi^2), \quad (3.28)$$

la derivada temporal de V es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\gamma}{2} (\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}) + \varphi \dot{\theta} = \frac{\gamma}{2} \left[(Ax + B\varphi u_c)^T P x + x^T P (Ax + B\varphi u_c) \right] + \varphi \dot{\theta} \\ &= \frac{\gamma}{2} [x^T A^T P x + u_c^T \varphi^T B^T P x + x^T P A x + x^T P B \varphi u_c] + \varphi \dot{\theta} \\ &= -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + \frac{\gamma}{2} [u_c^T \varphi^T B^T P x + x^T P B \varphi u_c] + \varphi \dot{\theta}, \quad (3.29)\end{aligned}$$

ya que $u_c^T \varphi^T B^T P x$, $x^T P B \varphi u_c \in \mathbb{R}$, P es simétrica y $u_c^T \varphi^T B^T P x = [x^T P B \varphi u_c]^T$; entonces:

$$\dot{V} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + \gamma u_c^T \varphi^T B^T P x + \varphi \dot{\theta}. \quad (3.30)$$

Si $\varphi \in \mathbb{R}$, entonces

$$\dot{V} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + \varphi \left(\dot{\theta} + \gamma u_c^T B^T P x \right), \quad (3.31)$$

y eligiendo la derivada temporal de θ como (3.32), se garantiza que el sistema será asintóticamente estable.

$$\dot{\theta} = -\gamma u_c^T B^T P x. \quad (3.32)$$

Si adicionalmente, $G(p)$ es una función de transferencia estrictamente positiva real², entonces existe una matriz P tal que $B^T P = C$, donde C es la matriz de salida del sistema, entonces $B^T P x = Cx = e$ y la regla de ajuste de los parámetros puede finalmente ser expresada como:

$$\dot{\theta} = -\gamma u_c^T e. \quad (3.33)$$

3.5.2. MRAS para un sistema de primer orden

Considerando al sistema descrito por (3.8a), al modelo de referencia (3.8b), al error (3.8c) y la señal de control (3.9). La derivada del error es

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -ay + bu + a_m y_m - b_m u_c = -ay + b(\alpha y + \beta u_c) + a_m y_m - b_m u_c \\ &= -ay + b \left(\frac{a - a_m}{b} \right) y + b\beta u_c + a_m y_m - b_m u_c = -ay + ay - a_m y + b\beta u_c + a_m y_m - b_m u_c \\ &= -a_m(y - y_m) + (b\alpha - a + a_m)y + (b\beta - b_m)u_c = -a_m e + (b\alpha - a + a_m)y + (b\beta - b_m)u_c, \quad (3.34)\end{aligned}$$

donde se agregó el neutro aditivo $b\alpha y - b\alpha y$. Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V(e, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[e^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\alpha - a + a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (b\beta - b_m)^2 \right], \quad (3.35)$$

y calculando la derivada temporal de V , se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e\dot{e} - \frac{1}{b\gamma} (b\alpha - a + a_m)b\dot{\alpha} + \frac{1}{b\gamma} (b\beta - b_m)b\dot{\beta} \\ &= e \{ -a_m e + (b\alpha - a + a_m)y + (b\beta - b_m)u_c \} - \frac{1}{\gamma} (b\alpha - a + a_m)\dot{\alpha} + \frac{1}{\gamma} (b\beta - b_m)\dot{\beta} \\ &= -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma} (b\alpha - a + a_m) (\dot{\alpha} + \gamma e y) + \frac{1}{\gamma} (b\beta - b_m) (\dot{\beta} + \gamma e u_c). \quad (3.36)\end{aligned}$$

²Ver definición 34 en el capítulo D

Si se eligen las derivadas temporales de α y β como (3.37) se garantiza que el sistema será asintóticamente estable.

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} = -\gamma e y \\ \dot{\beta} = -\gamma e u_c \end{bmatrix} = -\gamma e \begin{bmatrix} y \\ u_c \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Hasta ahora, no se ha dicho nada sobre una buena elección de la ganancia de adaptación γ de los controladores adaptativos tanto para el enfoque del gradiente negativo como para el de estabilidad de Lyapunov. En la siguiente sección se presenta una técnica de control *sistemática* para resolver el problema de inexactitudes en los parámetros.

3.6. Control con acción integral

Una técnica de control por adaptación de ganancia se presenta en [40] y se refiere a él como *regulación vía control integral*. Ésta técnica de control es motivada por el mal desempeño que presenta la reducción del problema de regulación a uno de estabilización cuando los parámetros no se conocen exactamente.

Para que la reducción de un problema de regulación a uno de estabilización sea posible, es necesaria una componente estática $\bar{u}$ del control $u = \tilde{u} + \bar{u}$ que traslada el origen del espacio de estados al punto de regularización δ . Tanto $\tilde{u}$ como $\bar{u}$ dependen de los parámetros, pero $\tilde{u}$ se puede diseñar para que presenta cierta *robustez* a las inexactitudes en los parámetros; sin embargo, nada se puede hacer para $\bar{u}$. Lo anterior provoca que el sistema se estabilice (por $\tilde{u}$) en un punto diferente a δ (por la traslación que hace $\bar{u}$). A continuación se presenta como resolver el problema de regulación sin introducir términos de control estáticos.

Considerando al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$. Sea y_R una señal de referencia, se desea que $y(t) \rightarrow y_R$ cuando $t \rightarrow \infty$. Se propone resolver este problema de regulación por un control de retroalimentación. El objetivo es estabilizar el sistema en lazo cerrado en un punto de equilibrio tal que $y = y_R$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, u), \\ 0 &= h(x) - y_R. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Definiendo la integral del error de seguimiento como

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R,$$

se hace posible aumentar el sistema considerando a $\dot{\sigma}$ como un estado, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ \dot{\sigma} &= h(x) - y_R. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Una manera de resolver el problema de diseño para el sistema (3.40) es por linealización. Por conveniencia, se elige una traslación del origen de las coordenadas $x = z - \delta$ al punto δ y el problema de control se reduce a uno de estabilización en el origen; de esta manera la señal de referencia y_R siempre es cero. Se define un vector de estados ampliado $\xi = [x^T \ \sigma^T]^T$ y linealizando el sistema (3.40) se obtiene:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbb{A}\xi + \mathbb{B}u, \quad (3.41)$$

donde A , B , C son las matrices correspondientes a la linealización de (3.38) en $\dot{x} = Ax + Bu$ e $y = Cx$. Proponiendo un control proporcional al vector de estados $u = \mathbb{K}\xi$, se obtiene el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{\xi} = (A + B\mathbb{K})\xi = \tilde{A}\xi, \quad (3.42)$$

y ahora el problema se reduce a encontrar $\mathbb{K}$ tal que la matriz $\tilde{A}$ sea Hurwitz, es decir la parte real de los valores propios λ de la matriz sean estrictamente negativos ($Re[\lambda(\tilde{A})] < 0$).

Si se separa el vector de ganancias como $\mathbb{K} = [\mathbb{K}_1 \ \mathbb{K}_2]$ y el vector de estados $\xi = [x \ \sigma]$, de la expresión $u = \mathbb{K}\xi = \mathbb{K}_1x + \mathbb{K}_2\sigma$ claramente se ve $\mathbb{K}_1$ es el vector de ganancias que estabiliza el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ y que el vector de ganancias $\mathbb{K}_2$ se encarga de llevar $y \rightarrow y_R$, es decir $e = y - y_R \rightarrow 0$ de manera asintótica. En Fig. 3.4 se muestra un diagrama de bloques de la implementación de este control.

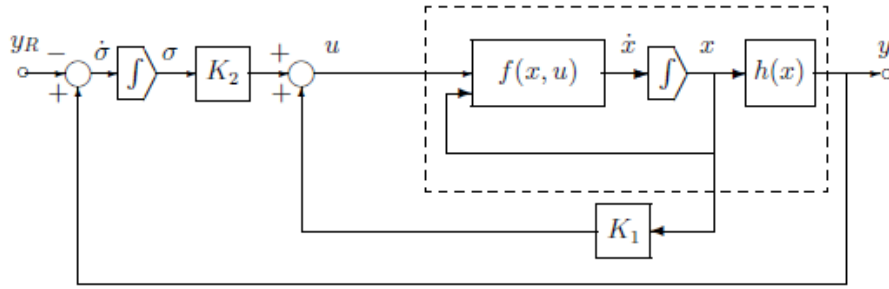


Figura 3.4: Diagrama de bloques del control por retroalimentación de estados con acción integral.

Control del TRMS

La teoría es asesinada tarde o temprano por la experiencia.

Albert Einstein.

Con la finalidad de simplificar las tareas de diseño que se presentan en este capítulo, se divide el TRMS en dos subsistemas: el primero es la mecánica del TRMS (estados x_1 , x_2 , x_3 y x_4) y el segundo son la dinámica de los rotores (estados x_5 y x_6). Los rotores no son incluidos en el diseño del controlador ya que se demuestra que éstos son globalmente asintóticamente estables; sin embargo, para el subsistema mecánico, primeramente se presenta una linealización exacta del modelo para aplicar las técnicas de control adaptativo estudiadas, se compara con dos técnicas clásicas de control lineal: regulador cuadrático lineal (LQR) y LQR con acción integral.

4.1. Estabilidad asintótica global de los rotores

Antes de demostrar la estabilidad de los rotores, primero se debe notar que no es pérdida de generalidad analizar la estabilidad en el origen. Sea el sistema no lineal $\dot{x} = f(x, u)$, suponga que tiene un punto de equilibrio en $x = \bar{x}$, entonces existe $\bar{u}$ tal que con el cambio de variables $z = x - \bar{x}$ y $w = u - \bar{u}$ el sistema $\dot{z} = f(z + \bar{x}, w + \bar{u})$ presenta un punto de equilibrio en el origen, es decir $z = 0$ y $w = 0$ implica $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Para los rotores del TRMS, modelados por la siguiente ecuación diferencial escalar no lineal:

$$\dot{\omega} = -d|\omega|\omega - b\omega + av, \quad (4.1)$$

y considerando la función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\omega^2,$$

para la ecuación (4.1) en lazo abierto ($v=0$), se tiene:

$$\dot{V} = \omega(-d|\omega|\omega - b\omega) = -\omega^2(d|\omega| + b) < 0 \quad \forall \omega \neq 0,$$

por lo que el origen de (4.1) es asintóticamente estable. Además de la estabilidad asintótica, se observa que la función de Lyapunov es radialmente no acotada; es decir $V(\omega) \rightarrow \infty$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ por lo que la estabilidad asintótica es global. Ya que los rotores son globalmente asintóticamente estables, se justifica el hecho de no incluirlos en el diseño de los controladores.

4.2. Linealización exacta entrada-estado por retroalimentación

La linealización exacta por retroalimentación es uno de los resultados de la teoría moderna de control geométrico para sistemas no lineales. Ésta teoría se inició alrededor de los 70's con intentos de extender los resultados sobre la teoría de sistemas lineales tales como controlabilidad y observabilidad a sistemas no lineales.

De manera general, el método de linealización exacta entrada-estado considera al sistema no lineal afín al control $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, un cambio de variables $z = T(x)$ y una *retroalimentación de estado* $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ que transformen el sistema no lineal a una *forma lineal equivalente*. Ésta linealización no se refiere a la linealización por expansión en serie de Taylor, sino que convierte *exactamente* al sistema en lineal. Desafortunadamente, no todos los sistemas son linealizables exactamente, en esta sección se definen las condiciones para que el sistema no lineal sea linealizable exactamente y en una sección posterior se linealizará por este método al subsistema mecánico del TRMS.

Definición 3 (Difeomorfismo). Un difeomorfismo es un cambio de variables T tal que $z = T(x)$ está definido en un dominio D_x , su transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ está definida en $D_z = T(D_x)$, y ambos T y T^{-1} son continuamente diferenciables en D_x y D_z respectivamente. ♣

Definición 4 (Linealización exacta entrada-estado). Un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (4.2)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ y $u \in \mathbb{R}$ son suficientemente suaves en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, se dice ser linealizable por retroalimentación (o linealizable entrada-estado) si existe un difeomorfismo $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D)$ contenga al origen y el cambio de variables $z = T(x)$ transforma el sistema (4.2) a la forma:

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)[u - \alpha(x)], \quad (4.3)$$

donde (A, B) es controlable y $\beta(x)$ es no singular $\forall x \in D$. ♣

El sistema no lineal (4.3) puede linealizarse exactamente tomando la señal de control por retroalimentación:

$$u = \alpha(z) + \beta^{-1}(z)v, \quad (4.4)$$

obteniendo así el sistema linealizado:

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (4.5)$$

Es posible determinar si existe un difeomorfismo $T(x)$ que pueda transformar (4.2) en (4.3) con el siguiente análisis. Derivando la ecuación $z = T(x)$:

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + g(x)u],$$

igualando a (4.3) se concluye que las condiciones que el difeomorfismo debe satisfacer son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} f(x) &= AT(x) - B\beta^{-1}(x)\alpha(x), \\ \frac{\partial T}{\partial x} G(x) &= B\beta^{-1}(x)\alpha(x), \end{aligned} \quad (4.6)$$

así que la determinación de si un sistema es linealizable exactamente por retroalimentación de estado, se reduce a la solución de las ecuaciones en derivadas parciales (4.6); la solución de éstas ecuaciones se puede simplificar como se muestra a continuación.

4.2.1. Linealización completa de estado

Cuando un sistema es linealizable entrada-estado, la transformación $z = T(x)$ no es única; la forma más simple de verlo es aplicando la transformación lineal $\zeta = Mz$, con M no singular, así se obtiene:

$$\dot{\zeta} = MAM^{-1}\zeta + MB\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)],$$

que tiene la misma estructura que (4.3) pero con matrices A y B diferentes. La no unicidad de T se puede aprovechar para simplificar las ecuaciones en derivadas parciales (4.6). Considerando nuevamente el caso $u \in \mathfrak{R}$ y (A, B) controlable, entonces existe M no singular que transforma (4.3) a la forma *canónica controlable*; es decir, $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^T$, $MB = B_c$ donde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix},$$

es decir,

$$\dot{\zeta} = (A_c + B_c\lambda^T)\zeta + B_c\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] = A_c\zeta + B_c\beta^{-1}(x)[u - \tilde{\alpha}(x)],$$

donde $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x) - \beta(x)\lambda^T MT(x)$; con ésto se comprueba que no se hace pérdida de generalidad considerar que A y B están en la forma canónica controlable A_c y B_c . Considerando $T(x) = [T_1(x) \ T_2(x) \ \cdots \ T_n(x)]^T$, es fácil verificar que

$$A_c T(x) - B_c \beta^{-1}(x) \alpha(x) = \begin{bmatrix} T_2 \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix}; \quad B_c \beta^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\beta(x) \end{bmatrix},$$

que permiten escribir las dos ecuaciones (4.6) como dos conjuntos de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) &= T_2(x), & \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) &= T_3(x), & \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0, \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x), & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) &= -\alpha(x)/\beta(x), & \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &= 1/\beta(x), \end{aligned}$$

con lo que (4.6) se reduce a la búsqueda de una función $T_1(x)$ que satisfaga

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) \neq 0; \quad \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) = 0; \quad \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x) = T_{i+1}(x); \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4.7)$$

donde las funciones α y β se determinan

$$\beta(x) = \frac{1}{\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x)}, \quad \alpha(x) = -\frac{\frac{\partial T_n}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x)}. \quad (4.8)$$

Finalmente, para simplificar los cálculos en las nuevas variables, se impone a $T_1(x)$ la condición adicional de que $T_1(x^*) = 0$ donde x^* es un punto de equilibrio del sistema en las coordenadas originales ($f(x^*) = 0$).

4.2.2. Linealización exacta del subsistema mecánico del TRMS

Partiendo del modelo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= \eta_1 x_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1 + (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1) w_1 + (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1) w_2 + \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1, \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{\rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + (\rho_3 w_1 + \rho_4 w_2) \cos x_1}{\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

que por simplicidad en la notación se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 x^{[1]} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dot{x}^{[1]} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f^{[1]}(x^{[1]}) + g^{[1]}(x^{[1]}) w_1, \\
 x^{[2]} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \dot{x}^{[2]} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f^{[2]}(x^{[2]}) + g^{[2]}(x^{[2]}) w_2,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
 f^{[1]}(x^{[1]}) &= \begin{bmatrix} f_1^{[1]} \\ f_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \eta_1 x_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1 + (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1) w_2 + \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 \end{bmatrix}, \\
 g^{[1]}(x^{[1]}) &= \begin{bmatrix} g_1^{[1]} \\ g_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.11a}$$

$$\begin{aligned}
 f^{[2]}(x^{[2]}) &= \begin{bmatrix} f_1^{[2]} \\ f_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ \frac{\rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + \rho_3 w_1 \cos x_1}{\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7} \end{bmatrix}, \\
 g^{[2]}(x^{[2]}) &= \begin{bmatrix} g_1^{[2]} \\ g_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho_4 \cos x_1}{\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.11b}$$

Para determinar la posibilidad de linealización exacta de (4.11a), aplicamos las condiciones (4.7):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1}{\partial x^{[1]}} g^{[1]}(x^{[1]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^{[1]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} g_2^{[1]} = 0, \\
 \frac{\partial T_2}{\partial x^{[1]}} g^{[1]}(x^{[1]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^{[1]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} g_2^{[1]} \neq 0, \\
 \frac{\partial T_1}{\partial x^{[1]}} f^{[1]}(x^{[1]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{[1]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 = T_2,
 \end{aligned}$$

como $\partial T_2 / \partial x_2 = \partial T_1 / \partial x_1$ entonces $(\partial T_2 / \partial x_2) g_2^{[1]} = (\partial T_1 / \partial x_1) g_2^{[1]} \neq 0$ que se satisface eligiendo $T_1(x) = x_1$, entonces $T_2 = (\partial T_1 / \partial x_1) x_2 = x_2$ con lo cual se concluye que el sistema (4.11a) es linealizable exactamente entrada-estado con el difeomorfismo $z = [z_1 \ z_2]^T = T(x) = [x_1 \ x_2]^T$ (la identidad).

Para determinar la posibilidad de linealización exacta de (4.11b), se procede de manera similar, por aplicación de (4.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1}{\partial x^{[2]}} g^{[2]}(x^{[2]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_3} & \frac{\partial T_1}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^{[2]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_4} g_2^{[2]} = 0, \\
 \frac{\partial T_2}{\partial x^{[2]}} g^{[2]}(x^{[2]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_3} & \frac{\partial T_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^{[2]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_2}{\partial x_4} g_2^{[2]} \neq 0, \\
 \frac{\partial T_1}{\partial x^{[2]}} f^{[2]}(x^{[2]}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_3} & \frac{\partial T_1}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ f_2^{[2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ f_2^{[2]} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_3} x_4 = T_2,
 \end{aligned}$$

como $\partial T_2/\partial x_4 = \partial T_1/\partial x_3$ entonces $(\partial T_2/\partial x_4)g_2^{[2]} = (\partial T_1/\partial x_3)g_2^{[2]} \neq 0$ que se satisface eligiendo $T_1(x) = x_3$, entonces $T_2 = (\partial T_1/\partial x_3)x_4 = x_4$ con lo cual se concluye que el sistema (4.11a) es linealizable exactamente entrada-estado con el difeomorfismo $z = [z_3 \ z_4]^T = T(x) = [x_3 \ x_4]^T$ (la identidad).

Ya que el sistema (4.9) es linealizable exactamente en las variables originales (el difeomorfismo es la identidad), no se realiza el cambio de variables x a z para indicar el espacio donde es posible la linealización, sino para otro fin que se indica a continuación. Este problema de *regulación* del estado x en la posición δ puede reducirse a un problema de *estabilización* definiendo un espacio de estados z donde su origen sea el punto $\delta = [\delta_1 \ 0 \ \delta_3 \ 0]^T$; es decir, $z = x - \delta$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \eta_1 z_2 + \eta_2 \cos(z_1 + \delta_1) + \eta_3 \sin(z_1 + \delta_1) + [\eta_4 + \eta_7 z_4 \cos(z_1 + \delta_1)]w_1 + \\ &\quad + [\eta_5 + \eta_8 z_4 \cos(z_1 + \delta_1)]w_2 + \eta_6 z_4^2 \sin 2(z_1 + \delta_1), \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= \frac{\rho_1 z_4 + \rho_2(z_3 + \delta_3) + (\rho_3 w_1 + \rho_4 w_2) \cos(z_1 + \delta_1)}{\rho_5 \cos^2(z_1 + \delta_1) + \rho_6 \sin^2(z_1 + \delta_1) + \rho_7},\end{aligned}\tag{4.12}$$

La componente de control estática $\bar{w} = [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2]^T$ se deduce analizando las condiciones de equilibrio $z_\eta, \dot{z}_\eta = 0$ donde se obtiene:

$$\begin{aligned}0 &= \eta_2 \cos \delta_1 + \eta_3 \sin \delta_1 + \eta_4 \bar{w}_1 + \eta_5 \bar{w}_2, \\ 0 &= \rho_2 \delta_3 + (\rho_3 \bar{w}_1 + \rho_4 \bar{w}_2) \cos \delta_1,\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 &= -\frac{1}{\eta_4} (\eta_2 \cos \delta_1 + \eta_3 \sin \delta_1 + \eta_5 \bar{w}_2) = -\frac{\rho_4 \eta_4}{\eta_4(\rho_4 \eta_4 - \rho_3 \eta_5)} \left\{ \eta_2 \cos \delta_1 + \eta_3 \sin \delta_1 - \frac{\rho_2 \eta_5 \delta_3}{\rho_4 \cos \delta_1} \right\}, \\ \bar{w}_2 &= -\frac{1}{\eta_4} \left(\frac{\rho_2 \delta_3}{\cos \delta_1} + \rho_3 \bar{w}_1 \right) = -\frac{\eta_3 \eta_4}{\rho_3(\eta_3 \eta_4 - \rho_4 \eta_5)} \left\{ \frac{\rho_2 \delta_3}{\cos \delta_1} - \frac{\rho_4}{\eta_4} (\eta_2 \cos \delta_1 + \eta_3 \sin \delta_1) \right\},\end{aligned}\tag{4.14}$$

Se puede definir una nueva variable de control

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w - \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix},\tag{4.15}$$

que incluye la componente estática que provoca cambiar el modelo del espacio de estados x al espacio de estados z con lo que queda reducido el problema de *regulación* ($x = \delta$) al de *estabilización* ($z = 0$).

Se reescribe nuevamente el modelo como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 = x_2, \\ \dot{z}_2 &= \eta_1 z_2 + \eta_2 \cos x_1 + \eta_3 \sin x_1 + \eta_6 z_4^2 \sin 2x_1 + (\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1)(v_1 + \bar{w}_1) + (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1)w_2, \\ \dot{z}_3 &= z_4 = x_4, \\ \dot{z}_4 &= \frac{\rho_1 x_4 + \rho_2 x_3 + [\rho_3 w_1 + \rho_4 (v_2 + \bar{w}_2)] \cos x_1}{\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Si se define una nueva variable de control:

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{1}{\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1} \left\{ u_1 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 - (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1)w_2 \right\} - \bar{w}_1, \\ v_2 &= \frac{1}{\rho_4} \left(\frac{[\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7]u_2 - \rho_1 x_4 - \rho_2 x_3}{\cos x_1} - \rho_3 w_1 \right) - \bar{w}_2,\end{aligned}\tag{4.17}$$

entonces el modelo (4.16) se linealiza exactamente como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \eta_1 z_2 + u_1, \\ \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_4 &= u_2,\end{aligned}\tag{4.18}$$

que escrito en forma matricial se representa como

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Az + Bu; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z = Cz,\tag{4.19}$$

donde la linealización también desacopló el movimiento del plano vertical y horizontal; separando explícitamente, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 & 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{1 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} & C_1 \end{bmatrix} z; \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \eta_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}z^{[1]} &:= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{z}^{[1]} = A_1 z^{[1]} + B_1 u_1, \quad y^{[1]} = C_1 z^{[1]}; \\ z^{[2]} &:= \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{z}^{[2]} = A_2 z^{[2]} + B_1 u_2, \quad y^{[2]} = C_1 z^{[2]}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Una solución a este problema de control consiste en elegir las leyes de control $u_1 = -K_1 z^{[1]}$, $u_2 = -K_2 z^{[2]}$ para matrices K_1 , K_2 tales que $A_1 - B_1 K_1$, $A_2 - B_1 K_2 \in Hurwitz$. Regresando nuevamente a las variables de control originales:

$$\begin{aligned}u_1 &= -K_1 z^{[1]}, \quad u_2 = -K_2 z^{[2]}, \\ w_1 &= \frac{1}{\eta_4 + \eta_7 x_4 \cos x_1} \{u_1 - \eta_2 \cos x_1 - \eta_3 \sin x_1 - \eta_6 x_4^2 \sin 2x_1 - (\eta_5 + \eta_8 x_4 \cos x_1)w_2\}, \\ w_2 &= \frac{1}{\rho_4} \left(\frac{[\rho_5 \cos^2 x_1 + \rho_6 \sin^2 x_1 + \rho_7]u_2 - \rho_1 x_4 - \rho_2 x_3}{\cos x_1} - \rho_3 w_1 \right),\end{aligned}\tag{4.22}$$

En en las siguientes secciones se presenta diferentes diseños de control para la determinación de K_1 , K_2 ; primero se presentan diseños clásicos por retroalimentación de estado que servirán como el controlador base para el diseño de controlador adaptativo y como referencia para comparación de rendimiento entre estos controladores.

4.3. Diseño del observador de estados

Para las secciones siguientes, se presentan diseños de controladores por retroalimentación de estados; éstos diseños suponen que está disponible el vector de estados completo; sin embargo solo se disposición de mediciones de los estados x_1 y x_3 . En §1.2.6 se probó la observabilidad del sistema con lo que es posible el diseño de un observador de estados que permita la *estimación* de los estados restantes con conocimiento solo de los estados x_1 , x_3 y las entradas u_1 , u_2 .

Partiendo de los modelos lineales (4.21), se proponen dos observadores de la forma:

$$\begin{aligned}\hat{z}^{[1]} &:= \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}, & \dot{\hat{z}}^{[1]} &= A_1 \hat{z}^{[1]} + B_1 u_1 + L_1 (y^{[1]} - \hat{y}^{[1]}), & \hat{y}^{[1]} &= C_1 \hat{z}^{[1]}, \\ \hat{z}^{[2]} &:= \begin{bmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \end{bmatrix}, & \dot{\hat{z}}^{[2]} &= A_2 \hat{z}^{[2]} + B_1 u_2 + L_2 (y^{[2]} - \hat{y}^{[2]}), & \hat{y}^{[2]} &= C_1 \hat{z}^{[2]}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

con lo que por el teorema 35 es suficiente con elegir L_1 y L_2 de tal forma que $A_1 - L_1 C_1$ y $A_2 - L_2 C_1$ sean Hurwitz (asignación de polos, ver §D.7.3). Para $L_1 = [l_1 \ l_2]^T$ se tiene:

$$|\lambda \mathbb{I} - (A_1 - L_1 C_1)| = \left| \lambda \mathbb{I} - \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 & \lambda - \eta_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (l_1 - \eta_1)\lambda + l_2 - l_1 \eta_1 = 0,$$

y las raíces del polinomio característicos son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\eta_1 - l_1 \pm \sqrt{l_1^2 + \eta_1^2 + 2l_1 \eta_1 - 4l_2} \right),$$

con lo que para que $\hat{z}^{[1]}(t) \rightarrow z^{[1]}(t)$ se debe satisfacer que:

$$l_1 > \eta_1; \quad l_2 > \frac{1}{4} [l_1(l_1 + 2\eta_1) + \eta_1^2].$$

Por otro lado, para $L_2 = [l_1 \ l_2]^T$ se tiene:

$$|\lambda \mathbb{I} - (A_2 - L_2 C_1)| = \left| \lambda \mathbb{I} - \begin{bmatrix} -\ell_1 & 1 \\ -\ell_2 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda + \ell_1 & -1 \\ \ell_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \ell_1 \lambda + \ell_2 = 0,$$

y las raíces del polinomio característicos son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\ell_1 \pm \sqrt{\ell_1^2 - 4\ell_2} \right),$$

con lo que para que $\hat{z}^{[2]}(t) \rightarrow z^{[2]}(t)$ se debe satisfacer que:

$$\ell_1 > 0; \quad \ell_2 > \frac{1}{4} \ell_1^2.$$

Ahora, con el observador diseñado, es posible la implementación de los controladores por retroalimentación de estados que se obtienen en las secciones siguientes.

4.4. Control por retroalimentación de estados

Considerando el modelo del sistema (4.21), el objetivo es obtener las señales de control u_1 , u_2 que estabilice el sistema en el origen; se propone un regulador cuadrático lineal (LQR) (ver subsección D.7.2) para cada uno de los sistemas de (4.21).

4.4.1. Control del movimiento en el plano vertical

Considerando el sistema

$$\dot{z}^{[1]} = A_1 z^{[1]} + B_1 u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \eta_1 \end{bmatrix} z^{[1]} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \quad (4.24)$$

la matriz simétrica $P_1 = [a_1, b_1; b_1, c_1]$, la matriz $Q_1 = \text{diag}[d_1, e_1]$ y $R_1 = r_1$; la ecuación algebraica de Ricatti correspondiente es:

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 - \frac{1}{r_1} P_1 B_1 B_1^T P_1 = \begin{bmatrix} -b_1^2/r_1 & a_1 + \eta_1 b_1 - b_1 c_1/r_1 \\ a_1 + \eta_1 b_1 - b_1 c_1/r_1 & 2b_1 + 2\eta_1 c_1 - c_1^2/r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 & 0 \\ 0 & -e_1 \end{bmatrix},$$

resolviendo para P_1 considerando las soluciones positivas de las raíces cuadradas, se tiene:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1(r_1 \eta_1^2 + e_1 + 2\sqrt{r_1 d_1})} & \sqrt{r_1 d_1} \\ \sqrt{r_1 d_1} & r_1 \left(\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + (e_1 + 2\sqrt{r_1 d_1})/r_1} \right) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la matriz $K_1 = R_1^{-1} B_1^T P_1$ resultante es:

$$K_1 = R_1^{-1} B_1^T P_1 = \frac{1}{r_1} \begin{bmatrix} \sqrt{r_1 d_1} & r_1 \left(\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + (e_1 + 2\sqrt{r_1 d_1})/r_1} \right) \end{bmatrix}.$$

4.4.2. Control del movimiento en el plano horizontal

Considerando el sistema:

$$\dot{z}^{[2]} = A_2 z^{[2]} + B_1 u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{[2]} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad (4.25)$$

Considerando la matriz simétrica $P_2 = [a_2, b_2; b_2, c_2]$, la matriz $Q_2 = \text{diag}[d_2, e_2]$ y $R_2 = r_2$; la ecuación algebraica de Ricatti correspondiente es:

$$P_2 A_2 + A_2^T P_2 - \frac{1}{r_2} P_2 B_2 B_2^T P_2 = \begin{bmatrix} -b_2^2/r_2 & a_2 - b_2 c_2/r_2 \\ a_2 - b_2 c_2/r_2 & 2b_2 - c_2^2/r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_2 & 0 \\ 0 & -e_2 \end{bmatrix},$$

resolviendo para P_2 considerando las soluciones positivas de las raíces cuadradas, se tiene:

$$P_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{d_2(e_2 + 2\sqrt{r_2 d_2})} & \sqrt{r_2 d_2} \\ \sqrt{r_2 d_2} & \sqrt{r_2(e_2 + 2\sqrt{r_2 d_2})} \end{bmatrix}.$$

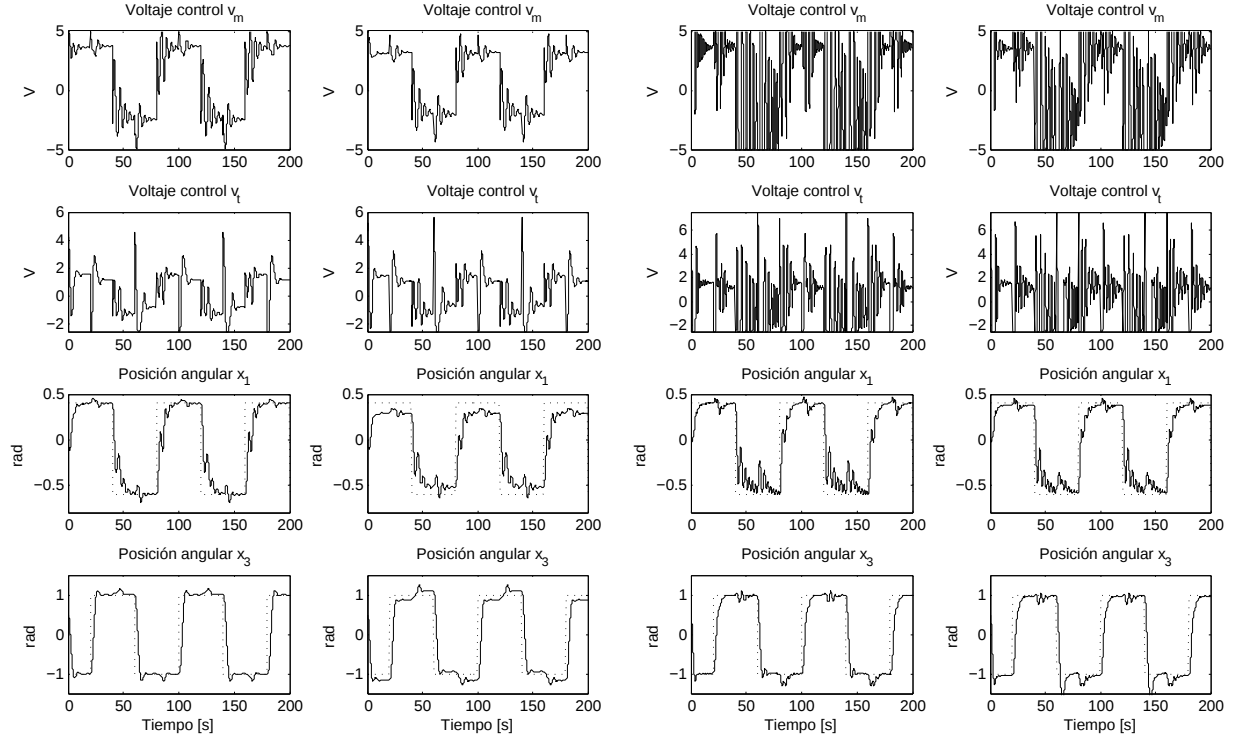
Finalmente, la matriz $K_2 = R_2^{-1} B_1^T P_2$ resultante es:

$$K_2 = R_2^{-1} B_1^T P_2 = \frac{1}{r_2} \begin{bmatrix} \sqrt{r_2 d_2} & \sqrt{r_2(e_2 + 2\sqrt{r_2 d_2})} \end{bmatrix}.$$

En Fig. 4.1 se muestra el resultado de dos simulaciones: en el primer experimento Fig. 4.1(a) Izq), los parámetros $\hat{\eta}$, $\hat{\rho}$ del controlador coinciden con los parámetros nominales η , ρ del modelo y en el segundo experimento Fig. 4.1(a) Der), los parámetros se perturban de acuerdo a las variables aleatorias de distribución uniforme $\sigma_\eta, \sigma_\rho \in [0, 1]$ con un amplitudes $\varepsilon_\eta, \varepsilon_\rho$ respectivamente de la forma $\hat{\eta} = (\sigma_\eta \varepsilon_\eta + 1)\eta$ y $\hat{\rho} = (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + 1)\rho$. Los valores numéricos de las variables descritas empleadas en la simulación, se muestran en el cuadro 4.1.

Variable	Valor	Variable	Valor
$\varepsilon_\eta, \varepsilon_\rho$	0.6	R_1	1
$\varepsilon_v, \varepsilon_x$	0.05	R_2	9
σ_η	diag[1.1830 0.9708 0.9296 1.1738 0.9186 1.0194 1.1270 1.2229]	Q_1	diag[1, 2]
σ_ρ	diag[0.8972 1.0901 1.2849 0.7456 1.0522 0.9483 0.8855]	Q_2	diag[1, 1]

Cuadro 4.1: Valores empleados en la simulación del controlador LQR por linealización exacta.



(a) Control LQR. Izq) Diseñado con parámetros nominales, Der) Diseño con parámetros perturbados. (b) Control LQR y acción integral. Izq) Diseñado con parámetros nominales, Der) Diseño con parámetros perturbados.

Figura 4.1: Resultados obtenidos por simulación de la aplicación de control LQR y LQR con acción integral para el modelo linealizado exactamente (4.22).

4.5. Control con acción integral

Considerando las inexactitudes en la estimación de los parámetros, se espera que el sistema no pueda ser estabilizado en el punto de equilibrio δ preestablecido como se observa en Fig. 4.1(a) Der); por tal razón al control por retroalimentación de estado se adiciona un integrador para *robustecer* el control y eliminar el efecto producido por parámetros inexactos.

Para el movimiento en el plano vertical, se considera la integral del error $\dot{\sigma}_1 = e_1 = y^{[1]} - y_m^{[1]} = y^{[1]}$, donde $y^{[1]}$ es la posición angular en el plano vertical de la planta e $y_m^{[1]} = 0$ es la referencia (es cero debido a que el problema es de estabilización, es decir $z = 0$). Es posible definir un nuevo vector de estados que

Variable	Valor
R_1	1
R_2	9
Q_1	diag[1, 2]
Q_2	diag[1, 1]

Cuadro 4.2: Valores empleados en la simulación del controlador LQR con acción integral por linealización exacta.

incluye la integral del error como:

$$\xi^{[1]} = \begin{bmatrix} z^{[1]} \\ \sigma_1 \end{bmatrix},$$

y se obtiene el nuevo modelo en el espacio de estados:

$$\dot{\xi}^{[1]} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{2 \times 1} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \xi^{[1]} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 = \mathbb{A}_1 \xi^{[1]} + \mathbb{B}_1 u_1. \quad (4.26)$$

De manera similar, para el movimiento en el plano horizontal, se considera la integral del error $\sigma_2 = e_2 = y^{[2]} - y_m^{[2]} = y^{[2]}$, donde $y^{[2]}$ es la posición angular en el plano horizontal e $y_m^{[2]} = 0$ es la referencia; definiendo el vector de estados:

$$\xi^{[2]} = \begin{bmatrix} z^{[2]} \\ \sigma_2 \end{bmatrix},$$

se obtiene el modelo en el espacio de estados:

$$\dot{\xi}^{[2]} = \begin{bmatrix} A_2 & 0_{2 \times 1} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \xi^{[2]} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 = \mathbb{A}_2 \xi^{[2]} + \mathbb{B}_1 u_2. \quad (4.27)$$

Nuevamente, considerando los controles $u_1 = \mathbb{K}_1 \xi^{[1]}$ y $u_2 = \mathbb{K}_2 \xi^{[2]}$, se propone un regulador cuadrático lineal para resolver el problema de control de (4.26) y (4.27). Con un desarrollo similar al presentado en §4.4 se obtienen las matrices $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$; sin embargo, la solución analítica es demasiado complicada debido a que se tienen que resolver un sistema de ecuaciones algebraicas de grado superior; en la práctica se emplean métodos numéricos y MATLAB tiene implementado un comando dedicado a esta tarea; la sintaxis es `[K,P,e]=lqr(A,B,Q,R,N)` donde **e** son los eigenvalores del sistema **A,B** en lazo cerrado y **N** corresponde al término $2x^T N u$ en la función objetivo. En Fig. 4.1 se muestra la simulación de los controladores diseñados aplicado al modelo no lineal. Los valores numéricos empleados son iguales a los mostrados en el cuadro 4.1 excepto por las variables que se presentan en el cuadro 4.2.

4.6. Control adaptativo por modelo de referencia

Claramente puede verse que el modelo (4.18) representa dos ecuaciones diferenciales de segundo orden no acopladas, es posible reescribir dicho modelo para las variables α y β como:

$$\ddot{\alpha} - \eta_1 \dot{\alpha} = u_1, \quad \ddot{\beta} = u_2, \quad (4.28)$$

que permiten diseñar dos controladores adaptativos, uno para cada ecuación.

4.6.1. Adaptación de ganancia con enfoque de gradiente negativo del error

Cuando se aplica un control adaptativo por adaptación de ganancia, se requiere que el modelo de referencia en lazo cerrado sea asintóticamente estable; es decir, u_1^m y u_2^m deben ser tales que el polinomio característico de las ecuaciones (4.28) sean Hurwitz; una alternativa es elegir como entradas del modelo de referencia $u_1^m = K_1^m z^{[1]}$ y $u_2^m = K_2^m z^{[2]}$ que se obtuvieron en §4.4; de esta manera se puede considerar a $z^{[1]}, z^{[2]} \in \mathbb{R}^2$ como las entradas al sistema y $K_1(t), K_2(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ como las ganancias adaptables obteniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \eta_1 \dot{\alpha} = u_1 = K_1 z^{[1]} &\Rightarrow \alpha = G_1(p) K_1 z^{[1]}, \text{ donde } K_1 = [k_1 \ k_2], \ G_1(p) = \frac{1}{p^2 - \eta_1 p}, \\ \ddot{\beta} = u_2 = K_2 z^{[2]}, &\Rightarrow \beta = G_2(p) K_2 z^{[2]}, \text{ donde } K_2 = [k_3 \ k_4], \ G_2(p) = \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

y como modelo de referencia se considera

$$\alpha_m = G_1(p) K_1^m z_m^{[1]}, \quad \beta_m = G_2(p) K_2^m z_m^{[2]}, \quad \text{donde } K_1^m = [k_1^m \ k_2^m], \ K_2^m = [k_3^m \ k_4^m],$$

con lo que se puede escribir el error como

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha - \alpha_m = G_1(p) K_1 z^{[1]} - G_1(p) K_1^m z_m^{[1]} = G_1(p) [k_1 z_1 + k_2 z_2] - G_1(p) K_1^m z_m^{[1]}, \\ e_2 &= \beta - \beta_m = G_2(p) K_2 z^{[2]} - G_2(p) K_2^m z_m^{[2]} = G_2(p) [k_3 z_3 + k_4 z_4] - G_2(p) K_2^m z_m^{[2]}, \end{aligned}$$

Aplicando (3.7) se obtienen las reglas de adaptación de ganancias con enfoque de gradiente negativo del error:

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= -e_1 \frac{\partial e_1}{\partial K_1} \Gamma_1 = -e_1 \left[\frac{\partial e_1}{\partial k_1} \ \frac{\partial e_1}{\partial k_2} \right] \Gamma_1 = -e_1 G_1(p) [z_1 \ z_2] \Gamma_1 = -e_1 G_1(p) \left(z^{[1]} \right)^T \Gamma_1, \\ \dot{K}_2 &= -e_2 \frac{\partial e_2}{\partial K_2} \Gamma_2 = -e_2 \left[\frac{\partial e_2}{\partial k_3} \ \frac{\partial e_2}{\partial k_4} \right] \Gamma_2 = -e_2 G_2(p) [z_3 \ z_4] \Gamma_2 = -e_2 G_2(p) \left(z^{[2]} \right)^T \Gamma_2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} > 0$.

Otra alternativa de control adaptativo es reducir el número de variables a adaptar; considerando $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ directamente y no $z^{[1]}, z^{[2]} \in \mathbb{R}^2$ como en el caso anterior, de esta manera se proponen las ganancias adaptables $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ como:

$$\alpha = G_1(p) \theta_1 u_1, \quad \beta = G_2(p) \theta_2 u_2,$$

y como modelo de referencia se considera

$$\alpha_m = G_1(p) \theta_1^m u_1 = G_1(p) u_1, \quad \beta_m = G_2(p) \theta_2^m u_2 = G_2(p) u_2, \quad \text{donde } \theta_1^m = \theta_2^m = 1,$$

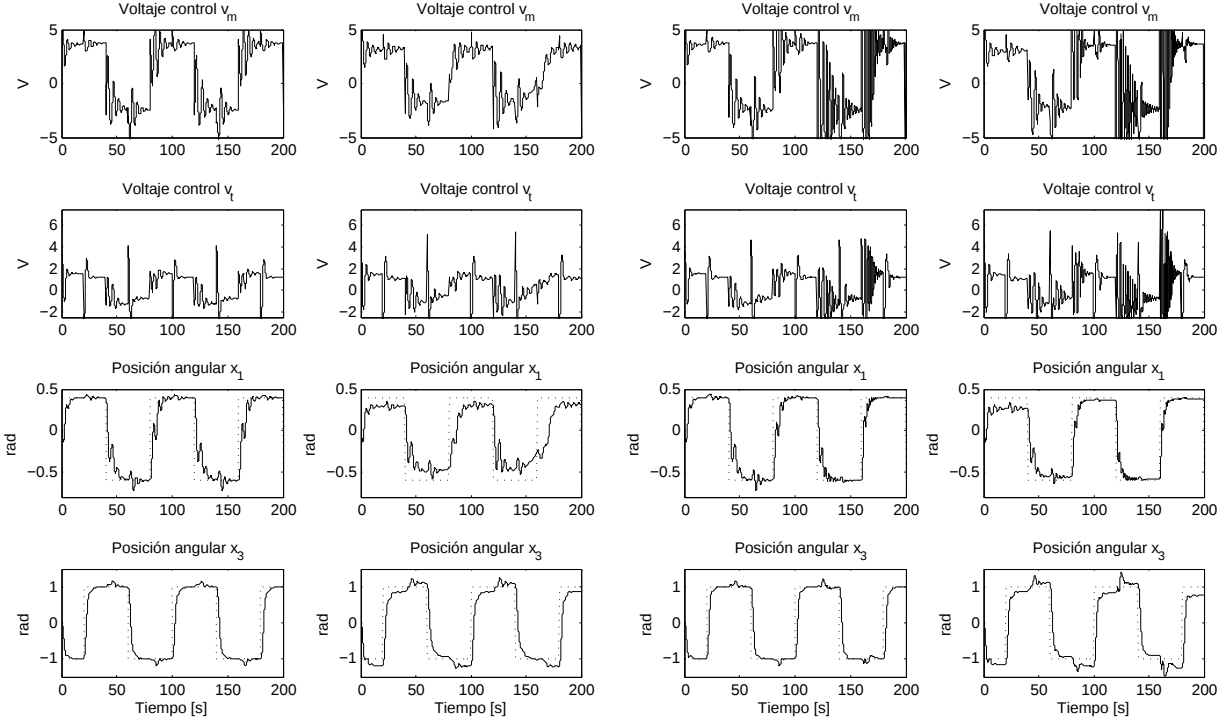
con lo que se puede escribir el error como

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha - \alpha_m = G_1(p) \theta_1 u_1 - G_1(p) u_1 = G_1(p) [\theta_1 - 1] u_1, \\ e_2 &= \beta - \beta_m = G_2(p) \theta_2 u_2 - G_2(p) u_2 = G_2(p) [\theta_2 - 1] u_2. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente (3.7) se obtienen las reglas de adaptación de ganancias con enfoque de gradiente negativo del error:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma_1 e_1 \frac{\partial e_1}{\partial \theta_1} = -\gamma_1 e_1 G_1(p) u_1 = -\gamma_1 e_1 \alpha_m, \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma_2 e_2 \frac{\partial e_2}{\partial \theta_2} = -\gamma_2 e_2 G_2(p) u_2 = -\gamma_2 e_2 \beta_m, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$. En Fig. 4.2 se muestra un resultado obtenido por simulación. Para el caso de adaptación de dos ganancias Fig. 4.2 Izq), las constantes de sensibilidad de adaptación empleadas son $\Gamma_1 = 1E^{-3} \mathbb{I}_2$, $\Gamma_2 = 1E^{-5} \mathbb{I}_2$, las condiciones iniciales son $K_1(0) = [-1 \ -1.98]$, $K_2(0) = [-0.3 \ -0.88]$. Para el caso de adaptación de una ganancia Fig. 4.2 Der), las constantes de sensibilidad de adaptación empleadas son $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = 0.1$, las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1$.



(a) Adaptación de dos ganancias. Izq) Diseñado con parámetros nominales, Der) Diseño con parámetros perturbados. (b) Adaptación de una ganancia. Izq) Diseñado con parámetros nominales, Der) Diseño con parámetros perturbados.

Figura 4.2: Resultados obtenidos por simulación de la implementación de control adaptativo de una y dos ganancias con enfoque de gradiente negativo del error (4.22).

4.6.2. Adaptación de una ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov

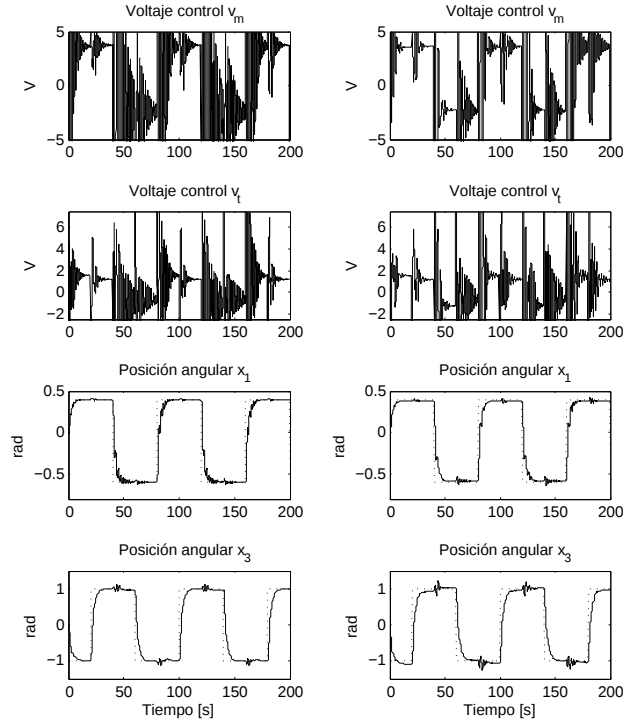
Con un procedimiento similar al anterior, se puede obtener una regla de adaptación de ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov, considerando el modelo del sistema (4.6.1), el modelo de referencia (4.6.1) y el error (4.6.1), con aplicación de (3.32) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -\gamma_1 u_1 B_1^T P_1 z^{[1]} = -\gamma_1 u_1 [0 \ 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\gamma_1 u_1 z_2, \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma_2 u_2 B_1^T P_2 z^{[2]} = -\gamma_2 u_2 [0 \ 1] \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = -\gamma_2 u_2 z_4,\end{aligned}\tag{4.31}$$

donde $P_1 = P_2 = \mathbb{I}_2$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$. En Fig. 4.3 se muestran dos resultados obtenidos por simulación: cuando los parámetros son nominales y cuando están perturbados. Las constantes de sensibilidad de adaptación empleadas son $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ y las condiciones iniciales son $\theta_1(0) = 7$, $\theta_2(0) = 2$.

4.7. Conclusiones

Entre los controladores diseñados en esta sección, para parámetros conocidos con suficiente precisión, el controlador LQR es quien presenta mejores características en cuanto a energía en el controlador; sin embargo



(a) Diseñado con parámetros nominales. (b) Diseño con parámetros perturbados.

Figura 4.3: Resultados obtenidos por simulación de la implementación de control adaptativo de una ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov (4.31).

el resultado es deficiente cuando los parámetros se perturban. Para el caso de incertidumbre paramétricas los controladores de adaptación de ganancia con enfoque tanto de gradiente negativo del error y de estabilidad de Lyapunov son quienes aportan un mejor rendimiento, sin embargo, los esfuerzos de control son notablemente mayores; aún cuando los dos enfoques cumplen con el objetivo de adaptación a los parámetros, para este caso en particular, el enfoque de estabilidad de Lyapunov es quien aporta una mejor dinámica en lo que respecta al seguimiento de la curva de referencia; sin embargo, el esfuerzo de control es ligeramente mayor al que se requiere con el enfoque de gradiente negativo del error.

El regulador de adaptación de dos ganancias es quien presenta peores resultados en cuanto a adaptación, para constantes de sensibilidad pequeñas (del orden de milésimas) la convergencia es lenta; sin embargo, para constantes de sensibilidad más grandes, el sistema se vuelve inestable.

En las gráficas, para las señales de control, se acota al rango de -5 a 5 para el rotor principal y de -2.5 a 7.5 para el rotor de cola; éstos son los rangos de operación para los rotores, el objetivo de acotar las gráficas es hacer explícito la saturación que sufren los rotores con dichas señales de control.

Resultados y conclusiones

¡Resultados! Bueno, he conseguido un montón de resultados. Conozco ya miles de cosas que no funcionan.

Thomas A. Edison.

5.1. Resultados

Uno de los primeros resultados que se obtuvieron en este trabajo fueron las *modificaciones que se hicieron en el modelo* del TRMS, éstas consistieron en la determinación de las componentes de fuerza de propulsión de los rotores y la inclusión de un término de fricción no lineal en los rotores. Los resultados que se obtuvieron posteriormente pueden ser separados en dos partes: la estimación de parámetros y el control adaptativo.

5.1.1. La estimación de parámetros

Un primer resultado es un *algoritmo para el cálculo del número de condición* que funciona como complemento del algoritmo recursivo de estimación por mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial. Como no se encontraron métodos para la determinación del factor de olvido en el algoritmo de mínimos cuadrados, se obtuvo otro resultado que consistió en una serie de *criterios para la determinación del factor de olvido*. Finalmente, en esta dirección, un resultado importante fue la *validación de los algoritmos por modelos sintéticos y experimentalmente*; aquí se incluye la implementación en Matlab con programas Script y Simulink.

Tras la validación de los algoritmos, el siguiente resultado fue la implementación en Matlab-Simulink con *Real-Time Workshop* y *Real-Time Windows Target* para ejecutar en tiempo real el algoritmo de estimación por mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial extendido con un *monitor del número de condición*. Sobre la marcha fue necesario un *algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular* para poder alcanzar uno de los resultados más importantes de este trabajo la *estimación de parámetros del*

TRMS. Adicionalmente, se propuso un método para la *estimación de derivadas de orden superior por ajuste polinomial y traslación de datos* el cual es de utilidad cuando el problema que se estudia involucra regresores no acotados.

Aún cuando la estimación de parámetros del TRMS en particular, es un problema lineal; también se estudiaron los métodos de estimación de parámetros para modelos no lineales y se obtuvo un resultado que consistió en la solución a un problema en óptica sobre la estimación de los parámetros de la presión ejercida por una herramienta para pulir lentes sobre una superficie óptica.

5.1.2. El control adaptativo

El primer resultado que se logró en este tema fue una *comparación experimental* de cuatro tipos de control adaptativo:

1. adaptación de ganancia con criterio de gradiente negativo del error,
2. adaptación de ganancia con criterio de estabilidad de Lyapunov,
3. adaptación de parámetros con criterio de gradiente negativo del error,
4. adaptación de parámetros con criterio de estabilidad de Lyapunov,

aplicados a un motor DC. Otro resultado fue la *evaluación y comparación por simulación de controladores clásicos por retroalimentación*: regulador cuadrático lineal y regulador cuadrático lineal con acción integral. Finalmente, se logró la implementación de un *control adaptativo para el TRMS*.

5.2. Conclusiones

Las modificaciones hechas al modelo del TRMS fueron acertadas: el ajuste con un modelo no lineal propuesto presentó mejores resultados frente al modelo lineal original, esto es principalmente porque la velocidad del rotor es alta, con lo cual también el efecto de fricción no lineal es más evidente. Respecto a la fuerza de propulsión, el modelo original solo dice que la propulsión del rotor principal actúan únicamente el plano vertical mientras el rotor de cola solo actúa en el plano horizontal; sin embargo, experimentalmente se concluyó con que tal afirmación es falsa debido a la observación de que la propulsión de ambos rotores afectan a ambos planos al mismo tiempo, de aquí es que la modificación al modelo en esta dirección aportó buenos resultados.

Respecto a los algoritmos para la estimación de parámetros por mínimos cuadrados; la implementación para funcionar en tiempo real funcionó como se esperaba, los recursos que se requieren son mínimos y esto permite frecuencias de muestreo altas (en el orden de kHz para el equipo empleado), esto a su vez es bueno para estimar parámetros que cambian muy rápido en el tiempo.

El monitor de número de condición es un auxiliar que en la práctica puede ser indispensable debido a que en base al número de condición pueden establecerse criterios para la aceptación de la estimación; más aún, puede establecerse un criterio para la determinación de un factor de olvido variable que esté en función del condicionamiento del problema.

Finalmente, los criterios para la determinación del factor de olvido propuestos no pueden ser generalizados ya que experimentalmente se observó que el factor de olvido también está en función de la estructura del modelo (la calidad con que describe al sistema) o, análogamente, la magnitud del error entre los datos experimentales y el modelo; sin embargo, para modelos aproximados a los datos experimentales, tales que el error en los datos esté acotado y sea de naturaleza aleatoria con distribución uniforme, los criterios propuestos funcionan; por fortuna, la mayoría de los problemas de estimación de parámetros satisfacen estos requerimientos.

El algoritmo para la estimación de derivadas de orden superior por ajuste polinomial y traslación de datos propuesto logró el objetivo planteado; más aún, a pesar de que no se demuestra la estabilidad del algoritmo, por validación en modelos sintéticos se muestra que la ejecución en Matlab-Simulink para aplicaciones en tiempo real es estable, por lo que se concluye que es fiable el uso de dicho algoritmo como herramienta de instrumentación.

Para la estimación de parámetros del rotor, se aplicó el algoritmo propuesto de estimación de parámetros por traslación de datos debido a que una de las variables de regresión fue la posición (no está acotada debido a que se pide que sea una curva monótonamente creciente); los resultados que se obtuvieron fueron buenos lo que permite concluir favorablemente para otras aplicaciones con condiciones similares.

Los parámetros estimados para el modelo del TRMS lograron aproximación suficiente para los fines requeridos (análisis, simulación, diseño), de esto se concluye finalmente que tanto los algoritmos, como los programas computacionales, el software y hardware empleados funcionaron correctamente; además, todo el conjunto anterior no es rígido, la flexibilidad que presentan es suficiente para poder aplicar estas mismas herramientas a otros sistemas reales y sintéticos.

Sobre el control adaptativo, la comparación realizada no pudo ser concluyente a favor de un único controlador: en general, la adaptación de ganancia es mejor para sistemas lineales frente a la adaptación de parámetros, sin embargo, la adaptación de parámetros presenta un mejor rendimiento para sistemas no lineales. El criterio del gradiente negativo del error es más simple e inmediato de aplicar que el criterio de estabilidad de Lyapunov y no hay ventaja absoluta de uno sobre el otro, excepto porque no es directa la aplicación del enfoque de Lyapunov a la adaptación de parámetros para sistemas de orden superior. Para problemas particulares, en algunos funcionará correctamente un criterio y en algunos el otro o ambos, mucho depende de la experiencia y habilidad del diseñador para elegir entre uno de los criterios o alguna de las técnicas de adaptación (ganancia o parámetros).

Respecto a los controladores por retroalimentación de estados, el LQR con acción integral gana frente al LQR cuando se aplica a problemas donde la calidad de estimación de los parámetros es pobre; incluso, LQR con acción integral presenta cierto grado de adaptación que le permite funcionar satisfactoriamente incluso en problemas con parámetros variables (como en el caso del TRMS), tanto LQR y LQR con acción integral son sistemáticos, lo que deja muy poco a la experiencia del diseñador; sin embargo, es un método que se aplica solo a sistemas lineales.

Estimación de velocidad y aceleración angular del rotor del TRMS

La mejor forma de librarse de un problema es resolverlo.

Thomas Carlyle.

Cuando se diseña un sistema de control para un sistema en particular, generalmente se asume que los estados pueden medirse directamente de la planta y donde se suele incluir a la velocidad y aceleración como estados; sin embargo, esta suposición no siempre se cumple por lo que se aplican observadores de estado para poder implementar el sistema de control diseñado como se muestra en Fig. A.1. Por otro lado, el rendimiento de los observadores está fuertemente ligado con la identificación del sistema, donde destaca el conocimiento que se tenga sobre la planta (modelo del sistema) y la calidad de información que lo aproximan al sistema real (parámetros del modelo); por esta razón, los observadores de estado se clasifican entre las técnicas de *estimación basada en modelo*.

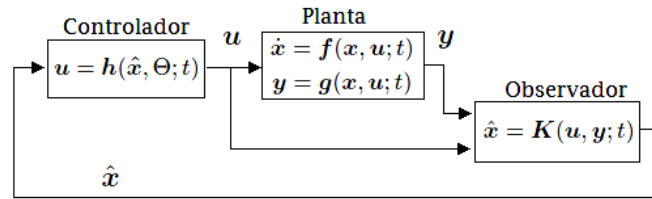


Figura A.1: Observadores de estado para recuperar componentes o todo el vector de estados.

Generalmente, en las primeras etapas de diseño no se tiene conocimiento sobre un modelo para la planta, no se conocen sus parámetros o éstos no describe con suficiente exactitud el fenómeno que se estudia; en este caso el problema de estimación de velocidad y aceleración angular se puede resolver por *estimación no basada en modelo*.

Como por lo general, la estimación de la velocidad y aceleración no es una meta final, sino el de recopilar información que ayude a construir un modelo y sus parámetros (identificar el sistema), se realiza

estimación no basada en modelo para estimar los parámetros de un modelo y finalmente poder diseñar un observador de estado basado en el modelo ajustado.

Esta sección se desarrolla para aplicar particularmente a la estimación de la velocidad y aceleración angular de los rotores del TRMS, físicamente es posible medir la posición angular con ayuda de diferentes tecnologías [41], entre los sensores más comunes se encuentran los encoders, resolvers y sensores de efecto Hall. Todos estos sensores se pueden caracterizar por la resolución que es el mínimo desplazamiento angular que son capaces de detectar. Definimos la resolución como $\Delta x = 2\pi/N$ rad, donde N es el número de pulsos por revolución que genera el sensor.

A.1. Definición del problema

Dada una función $\tilde{x}(t)$ discontinua por cuantización de posición con resolución Δx que corresponde al muestreo y retención de una función continua $x(t)$ que representa la posición y donde $\tilde{x}(t) = x(t)$ en los instantes t_k donde ocurren las discontinuidades como se ilustra en Fig. A.2, se asume que la posición es monóticamente creciente y que puede ser representada por

$$\tilde{x}(t_k) = x(t_k) = k\Delta x, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

donde t_k es el instante de t donde ocurre la k -ésima discontinuidad de $\tilde{x}(t)$; entonces, dada una secuencia de números reales positivos $\{t_k\} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ tales que $\tilde{x}(t_k) = k\Delta x$, determinar la primera y segunda derivada de alguna función continua y diferenciable dos veces $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t_k) = \tilde{x}(t_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ [42].

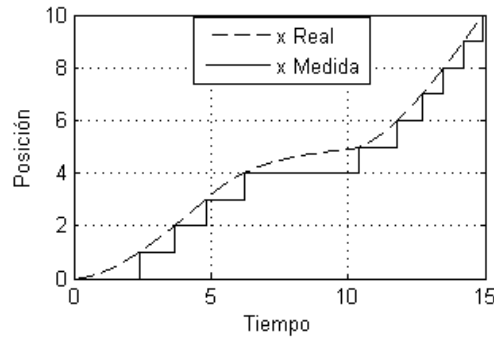


Figura A.2: Posición angular real $x(t)$ y cuantizada $\tilde{x}(t)$ a lo largo de una trayectoria monóticamente creciente.

El problema planteado da como información al tiempo muestreado a intervalos regulares de posición o *espacio fijo*, por lo que directamente se puede aproximar la derivada por métodos numéricos e invertir el resultado para obtener la derivada temporal; sin embargo, ésto no se puede aplicar directamente para derivadas temporales de orden superior. Dos alternativas para poder calcular derivadas de orden superior con la información (A.1) son:

1. Interpolación de $\tilde{x}$ y calcular las derivadas numéricas considerando intervalos de muestreo regulares en el tiempo.
2. Ajuste de un polinomio de grado adecuado y cálculo de las derivadas por conocimiento de los coeficientes.

Definición 5 (Estimación no basada en modelo con algoritmo de tiempo fijo). Muestrear $\tilde{x}(t)$ con periodo de muestreo T , lo que produce una secuencia $\tilde{x}_k = \tilde{x}(kT)$ donde el espacio es muestreado con un periodo de tiempo constante T . Este problema puede ser resuelto como una combinación lineal de posiciones muestreadas en tiempos equidistantes (A.2). Este método es conocido como *algoritmo de tiempo fijo*.

$$\hat{v}(kT) = \frac{1}{T} [a_0 \tilde{x}(kT) + a_1 \tilde{x}((k-1)T) + \cdots + a_n \tilde{x}((k-n)T)]. \quad (\text{A.2})$$



Definición 6 (Estimación no basada en modelo con algoritmo de espacio fijo). Muestrear $t(\tilde{x})$ con periodo de muestreo Δx , lo que produce una secuencia $t_k = \tilde{t}(k\Delta x)$ donde el tiempo es muestreado con un periodo de espacio constante Δx . Este problema puede ser resuelto como una combinación lineal de los lapsos de tiempo entre $n+1$ consecutivas discontinuidades de $\tilde{x}(t)$ (A.3). Este método es conocido como *algoritmo de espacio fijo*.

$$\hat{v}^{-1}(k\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} [a_0 \tilde{t}(k\Delta x) + a_1 \tilde{t}((k-1)\Delta x) + \cdots + a_n \tilde{t}((k-n)\Delta x)]. \quad (\text{A.3})$$



Note que el método (A.3) es de aplicación directa, puesto que el tiempo está muestreado a intervalos regulares Δx que es la información con la que se plantea el problema, sin embargo, con el método (A.2) es necesaria una tarea intermedia de interpolación o aproximación de una función a los datos para tener disponible información tal que se tenga conocimiento de la posición a intervalos regulares de tiempo T . Es importante señalar que el método (A.3) no puede emplearse directamente para la estimación de derivadas de orden superior; sin embargo, con el método (A.2) si es posible; por esta razón, se implementan como complementarios.

A.2. Estimación por interpolación de datos y derivación numérica

La interpolación necesaria para el método (A.2) se debe realizar muy cuidadosamente debido a que los datos que se van a interpolar están contaminados con ruido, este simple hecho provoca que una interpolación, cualquiera que sea, incluya también el ruido proveniente de la medición o del proceso.

Se propone que la interpolación se realice por medio del polinomio de interpolación de Lagrange debido a su sencillez y eficiencia numérica; tomando en cuenta que la sintonización de la interpolación se realizará experimentalmente (configuración del número de puntos a interpolar por cada iteración).

Teorema 4 (Polinomio de interpolación de Lagrange): Sean $\{x_k\}_{k=0}^n$ $n+1$ diferentes números y $\{y_k\}_{k=0}^n$ valores arbitrarios que representan la evaluación de alguna función f en los puntos x_k (i.e. $y_k = f(x_k)$), entonces existe un único polinomio P_n de grado a lo más n con la propiedad de que:

$$y_k = f(x_k) = P_n(x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x); \quad L_{n,k}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{A.5})$$



A.2.1. Derivada numérica

En (A.2) y (A.3) se hace explícita la posibilidad de derivación numérica como una combinación lineal de los muestreos de espacio $\tilde{x}$ o tiempo $\tilde{t}$ respectivamente; para definir completamente estas ecuaciones, aplicamos el polinomio de Taylor para deducir las expresiones para primera y segunda derivada en distintos ordenes de aproximación.

Teorema 5 (Polinomio Taylor): *El polinomio que mejor aproxima a la función f cerca de x_0 tendrá hasta n derivadas en x_0 que coinciden con las de f y está dado por*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0). \quad (\text{A.6})$$

◆

En la práctica, las derivadas numéricas que se emplean son las de orden de aproximación $O(h^2)$ (A.7) y $O(h^4)$ (A.8) porque un orden de aproximación superior generalmente no mejora la precisión debido a errores de redondeo del hardware y, al requerir más puntos muestreados, provoca un mayor desfase en el tiempo (retardo constante) [43].

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \\ f''(x_0) &\approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}, \\ f''(x_0) &\approx \frac{-f_2 - 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Los datos que se procesan en general están contaminados con ruido y cualquier método de interpolación incluirá dicho ruido; más aún, el método de interpolación propuesto presenta *oscilación polinomial* para polinomios de grado superior; todo esto lleva a la conclusión de que puede aproximarse una función a los datos que se procesan, pero no se puede decir lo mismo sobre las derivadas de la función que representa tales datos. En el apéndice B se propone una solución alternativa.

A.2.2. Registro de corrimiento

Debe observar que para el algoritmo de espacio fijo descrito por la ecuación (A.3) es necesario muestrear el tiempo y almacenar una sucesión $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k-1}, \dots, \tilde{t}_{k-n}]$ donde $n - 1$ es el número de puntos necesarios para el cálculo de las derivadas numéricas según el orden de aproximación que se aplique ($n - 1 = 3$ para $O(h^2)$ y $n - 1 = 5$ para $O(h^4)$).

Para el caso del algoritmo de tiempo fijo descrito por la ecuación (A.2) es necesaria la interpolación de una sucesión de datos $[(\tilde{t}_k, k\Delta x), (\tilde{t}_{k-1}, (k-1)\Delta x), \dots, (\tilde{t}_{k-n}, (k-n)\Delta x)]$ para obtener una sucesión $[\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1}, \dots, \tilde{x}_{k-n}]$ y aplicar la derivada numérica correspondiente.

Note que tanto para el primer y segundo caso, solo es suficiente el muestreo y almacenamiento de la secuencia $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k-1}, \dots, \tilde{t}_{k-n}]$. Pueden unificarse las tareas de muestreo y almacenamiento con la construcción

de un registro de corrimiento $S(c, t)$, el cuál se puede describir como:

$$S(c, t) = \begin{cases} S^+ = [t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}] & c = e^+, \\ S = [s_1, s_2, \dots, s_n] & c = e^-, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

donde c es una lectura de la salida del generador de eventos y t es el tiempo. Cuando se genere un evento e^+ , $S(c, t)$ re-almacenará todas las cantidades una celda a la derecha y en la primera celda almacenará el valor t . En otro caso, t es ignorada y las componentes de S se mantiene invariante.

A.2.3. Gestión por eventos y la función histéresis como generador de eventos

La implementación de estos algoritmos para la estimación de velocidad y aceleración angular debe realizarse solo cuando se tiene información correcta del sistema, de Fig. A.2 se sabe que esto ocurre en los instantes t_k cuando ocurre la k -ésima discontinuidad de $\tilde{x}$. Es posible considerar directamente las discontinuidades en $\tilde{x}$ como los generadores de eventos para ejecutar el algoritmo completo; sin embargo, dependiendo de la aplicación, la velocidad que se esté midiendo puede ser demasiado alta y la resolución Δx puede ser muy fina lo que puede provocar sobrecarga al hardware de cómputo, de aquí surge la necesidad de incrementar el rango Δx .

Como generador de eventos se puede aplicar una función idealizada de histéresis en función de ζ con salida e^+ y e^- (ver Fig. A.3):

$$e = H(\zeta) = \begin{cases} e^+ & \zeta > \zeta_u, \\ e^- & \zeta < \zeta_l, \\ e & \zeta_l \leq \zeta \leq \zeta_u, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

donde el umbral de histéresis $H_u = \zeta_u - \zeta_l$ es el intervalo ζ donde el estado permanece invariante, ver Fig. A.3. Con esta función podemos considerar $\zeta = \tilde{x}$ y la transición del estado e^- a e^+ como el evento que dispare el algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular.

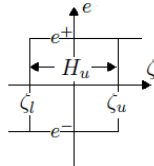


Figura A.3: Histéresis ideal empleado como generador de eventos.

A.2.4. Envolvimiento de posición

La función de histéresis opera en un rango entre ζ_l y ζ_u , mientras que la curva $\zeta = \tilde{x}$ es monóticamente creciente, por tal razón, una solución para mantener la función de histéresis operando sería haciendo una modificación tal que sus límites inferior y superior estén en función de un offset $\delta(\tilde{x})$, $\zeta_l(\delta)$ y $\zeta_u(\delta)$; esto es conocido como *ventaneo dinámico*; sin embargo, la solución que se aplicará en este trabajo es modificar la curva de posición ζ de tal manera que siempre se encuentre acotada a los límites ζ_l y ζ_u , ver Fig. A.4; esta es una transformación típica en interferometría óptica conocida como *envolvimiento*.

Por simplicidad, podemos tomar el límite inferior ζ_l igual a cero y considerar dos métodos para el envolvimiento definidos por las ecuaciones (A.11), donde k es el contador de discontinuidades y $Mod(\alpha, \beta)$

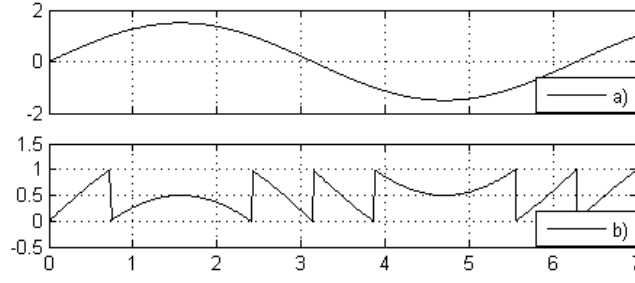


Figura A.4: Envolvimiento de a) $x(t) = 1.5 \sin t$ para obtener b) ζ acotada en los límites inferior y superior $[\zeta_l = 0, \zeta_u = 1]$.

es el residuo del cociente α/β . Particularmente se aplica la ecuación (A.11b) por su generalidad respecto a la no necesidad de k lo cual permite aplicación directa a curvas continuas.

$$x_w = \tilde{x} - k\zeta_u. \quad (\text{A.11a})$$

$$x_w = \text{Mod}(\tilde{x}, \zeta_u). \quad (\text{A.11b})$$

De esta manera, si $\zeta = x_w$, la función de histéresis puede operar tal y como se define en (A.10).

En Fig. A.5 se muestra una implementación en diagrama de bloques para la implementación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular.

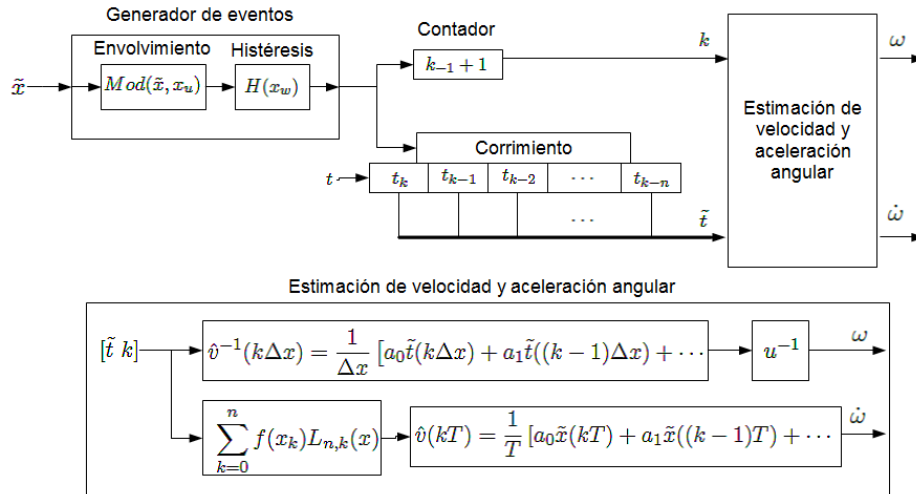


Figura A.5: Implementación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular con gestión por eventos.

A.3. Prueba del algoritmo por simulación

Consideremos un sistema dinámico de primer orden que puede ser representado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\frac{1}{2}\omega + v, \\ \dot{\theta} &= \omega,\end{aligned}\tag{A.12}$$

donde ω es la velocidad angular, θ la posición angular y v la señal de entrada. Con fines de ilustración del funcionamiento de los algoritmos de envolvimiento de curva y generación de eventos, consideremos un experimento donde elegimos v como:

$$v = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 2 & v \geq 10, \\ 0.3 & t \geq 20. \end{cases}\tag{A.13}$$

Realizando una simulación para $t = [0, 30]$, $\zeta_l = 0$ y $\zeta_u = \pi$; obtenemos los resultados que se muestran en Fig. A.6.

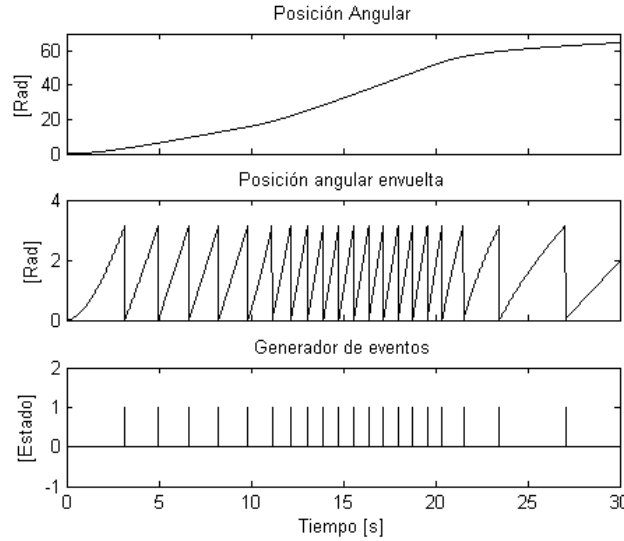


Figura A.6: Arriba) Curva de posición $\tilde{x}$ obtenida desde el sensor. Medio) Envolvimiento de $\tilde{x}$. Abajo) Pulsos generados por la función de histéresis donde $e^- = 0$ y $e^+ = 1$.

Para probar el funcionamiento del algoritmo completo de estimación de velocidad y aceleración angular, consideremos un experimento donde elegimos v como:

$$v = \begin{cases} 100 & t \geq 0, \\ 200 & v \geq 10, \\ 25 & t \geq 20. \end{cases}\tag{A.14}$$

Realizando una la simulación para $t = [0, 30]$, $\zeta_l = 0$ y $\zeta_u = 100$; obtenemos los resultados de la estimación de la velocidad y aceleración angular que se muestran en Fig. A.7.

Note primeramente que el algoritmo no ofrece salida de estimación hasta el instante t_n donde n es el número de celdas en el registro de corrimiento $S(c, t)$. Por lo tanto, de manera general, suponiendo que el

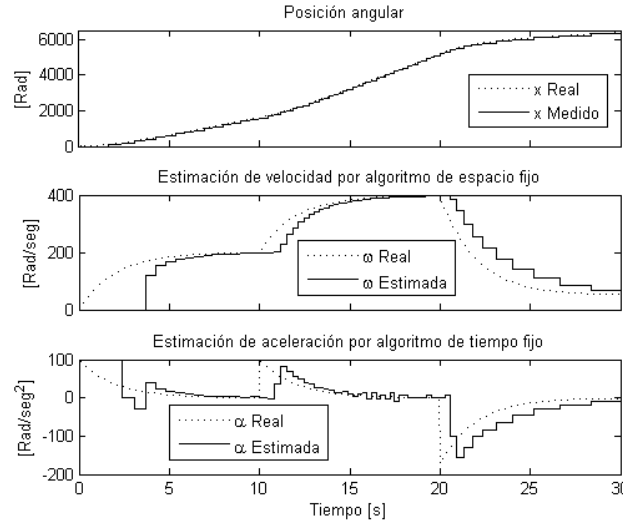


Figura A.7: Arriba) Curva de posición $\tilde{x}$. Medio) Velocidad angular real y estimada. Abajo) Aceleración angular real y estimada.

algoritmo se ejecuta en el instante t_0 este algoritmo ofrece salida hasta el instante t_n que es cuando el registro de corrimiento se ha llenado y tanto la interpolación como las derivadas numéricas son correspondientes a los datos medidos.

Observe que el algoritmo de estimación solo se ejecuta cuando ocurre una discontinuidad de $\tilde{x}$, que para este ejemplo es de $\Delta x = 100$, en cualquier otro caso se mantiene el último valor calculado. Este comportamiento describe dos características principales de las curvas de velocidad y aceleración estimadas:

1. Las curvas estimadas son *splines de orden cero*.
2. Las curvas estimadas presenta retardo variable en el orden de $\Delta \tilde{t} = \tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1}$.

La última característica enlistada no permite ajustar por traslación y escalado constante las curvas estimadas con las reales; más aún, observe que $\Delta \tilde{t} \rightarrow 0$ cuando $dx/dt \rightarrow \infty$, contrariamente $\Delta \tilde{t} \rightarrow \infty$ cuando $dx/dt \rightarrow 0$. Este comportamiento se debe tener siempre presente para poder realizar una buena estimación. Para resolver este problema tenemos disponible la elección de H_u y la señal de excitación al sistema.

A.4. Problemas que pueden presentarse

Las mediciones que entrega el sensor están contaminadas con un ruido w que para este análisis supondremos que está acotado $\|w\|_\infty = \epsilon$ y la frecuencia máxima de w es γ . El ruido w puede provocar que la función de histéresis no salga del umbral H_u y no genere el evento correspondiente, o que éste salga y genere un evento falso. En la figura (A.6 Abajo) la función de histéresis idealizada es tal que $e^+ = 1$ cuando $\tilde{x} = \zeta_u^0 = x_u$ y $e^- = 0$ cuando $\tilde{x} = \zeta_l^0 = x_l$, lo que significa que la función de histéresis posee *umbral máximo* H_u^+ y es igual a $H_u^+ = \zeta_u^0 - \zeta_l^0$. Por esta razón, lo que se visualiza son *deltas discretas* (pulsos de ancho cero) lo que hace evidente que el generador de eventos se dispare erráticamente con frecuencia máxima γ cuando $|\tilde{x} - x_l| \leq \epsilon$ y $|\tilde{x} - x_u| \leq \epsilon$.

Otro caso es que consideremos $e^+ = 1$ cuando $\tilde{x} > \zeta_m$ y $e^- = 0$ cuando $\tilde{x} < \zeta_m$, donde $\zeta_m = (\zeta_u - \zeta_l)/2$, y la función de histéresis posee *umbral cero*. Este caso reduce la función de histéresis a la función *signo* con traslación del origen a x_m . La salida nuevamente son deltas discretas y el generador de eventos se disparará erráticamente con frecuencia máxima γ cuando $|\tilde{x} - \zeta_m| \leq \epsilon$.

Una solución consiste en elegir los límites ζ_u y ζ_l de tal forma que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\zeta_u < \zeta_u^0 - \epsilon, \quad (\text{A.15a})$$

$$\zeta_l > \zeta_l^0 + \epsilon, \quad (\text{A.15b})$$

$$\epsilon < \zeta_u - \zeta_l, \quad (\text{A.15c})$$

donde ζ_l^0 y ζ_u^0 son los límites que se toman para obtener el umbral máximo H_m^+ (ver Fig. A.8). Si se satisfacen

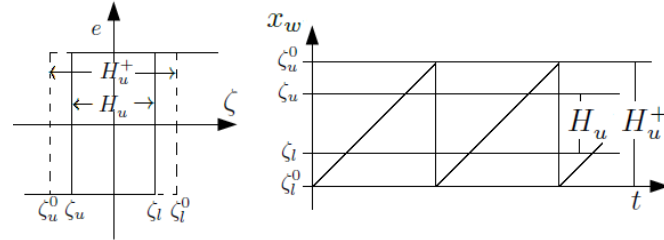


Figura A.8: Izq.) Función de histéresis con umbral $H_u < H_u^+$. Der.) Función de histéresis en el dominio del tiempo.

las condiciones (A.15) la salida del generador de eventos serán señales cuadradas para las cuales el evento sigue siendo definido como la transición desde el estado e^- a e^+ . Balanceando el umbral de histéresis al 50 % de H_u^+ los límites de histéresis se definen como:

$$\begin{aligned} \zeta_u &= \zeta_u^0 - \frac{1}{4}H_u^+, \\ \zeta_l &= \zeta_l^0 + \frac{1}{4}H_u^+, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

y de ésta manera solo debemos atender que $H_u = \zeta_u - \zeta_l > 2\epsilon$ y se estará cumpliendo con las condiciones (A.15). Note que, adicional al efecto de obtener señales cuadradas de ancho variable como salidas del generador de eventos, los eventos se adelantan con incrementos variables Δe ; afortunadamente, similar al retraso en la estimación, $\Delta e \rightarrow 0$ cuando $dx/dt \rightarrow \infty$, contrariamente $\Delta e \rightarrow \infty$ cuando $dx/dt \rightarrow 0$; por esta razón, se enfatiza en una adecuada elección de H_u y la señal de excitación al sistema.

A.5. Aplicación a un sistema real

Consideramos el rotor de un helicóptero de laboratorio el cuál puede ser modelado por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= a|\omega|\omega + b\omega + cv, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde ω y θ es la velocidad y posición angular respectivamente. Como no se cuenta con información alguna de este rotor, procederemos a la validación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular con la siguiente metodología:

1. Con las cantidades ω , $\dot{\omega}$ que proporcione este algoritmo, se estimarán los parámetros $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ (se supone que la convergencia de la estimación de parámetros es optimal).
2. Con los parámetros $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ se integra la solución $\theta = \int_{t_0}^{t_1} \omega(\tau) d\tau$ del modelo (A.17) y se compara con la medición del sensor $\tilde{x}$ la cual, despreciando el adelanto aportado por el generador de eventos al tomar $H_u < H_u^+$, se considera exacta en las discontinuidades $\tilde{x}_k = \theta(t_k)$.

Se espera que el error tenga amplitud máxima en el intervalo $[3\pi, 4\pi]$, por lo que los límites de umbral máximo de función de histéresis se asignan como $\zeta_l^0 = 0$ y $\zeta_u^0 = 10\pi$ y se aplican las ecuaciones (A.16). En la figura A.9 pueden visualizarse los resultados; las gráficas de velocidad y aceleración angular de antemano se esperaba que estuviesen correctas pues el estimador de parámetros minimizó el error entre la curva estimada y ajustada; para la gráfica de posición angular puede visualizarse como estas son correctas visualizando como $\tilde{x}_k \approx \theta(t_k)$ y el error está acotado en el umbral $H_u^+ = 10\pi$ como se muestra en la figura A.10.

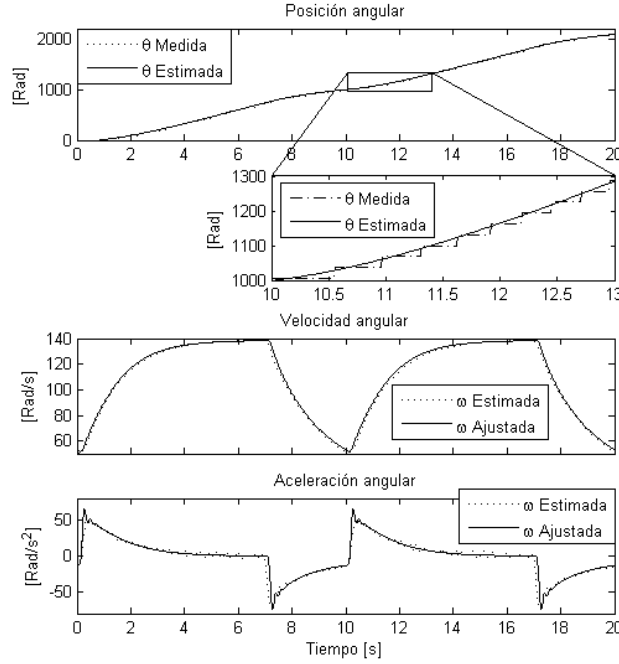


Figura A.9: Validación del algoritmo de estimación de velocidad y aceleración angular por comparación directa de posición angular.

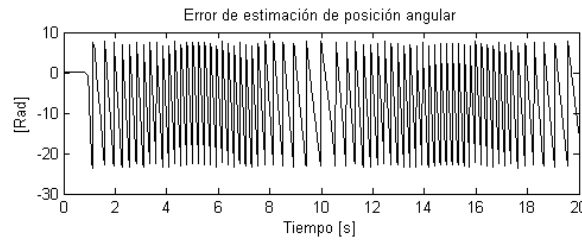


Figura A.10: Error entre la posición angular medida y estimada.

A.6. Conclusiones

Este algoritmo ofrece varias bondades, entre las que destacan su sencillez y su economía computacional lo cual permite ser viable para aplicaciones en tiempo real¹ y la implementación en sistema mínimos o embarcados. Esto último se logró principalmente por la implementación de la gestión por eventos que puede interpretarse como mantener el algoritmo apagado y solo encenderlo cuando es necesario.

Otra característica importante es que para curvas derivables n veces, éste algoritmo puede extenderse directamente a la estimación de las n derivadas. Éste algoritmo no se limita a la estimación de derivadas de cantidades angulares; si para cualquier trayectoria existe un sensor que puede medir intervalos regulares de desplazamiento, la aplicación de este algoritmo es directa. Un ejemplo de ésto último son los rieles de los trenes veloces.

Una clara limitación es que solo pueden considerarse la estimación a partir de curvas monóticamente crecientes; ésta principal limitación radica en el hecho de que se considera un sensor incapaz de definir el sentido del giro. Si tenemos disponible el sentido del giro (bien por un sensor capaz de hacerlo o por la aplicación de dos sensores como los aquí empleados), se debe modificar el algoritmo para agregar un registro de corrimiento para el muestreo y retención de la posición al igual que el que se ha implementado para el muestreo y retención del tiempo.

¹Ver capítulo D definición 35

Estimación de derivadas por ajuste polinomial y traslación de datos

Un edificio no es algo que
tú terminas; es algo que
tú comienzas.

Stewart Brand.

En este apéndice se presenta una solución alternativa a dos problemas que no necesariamente pueden aparecer juntos: primeramente la estimación de derivadas de orden superior procesando datos contaminados con ruido y la estimación de parámetros en modelos con regresores no acotados. Para el primer problema se propone un ajuste polinomial de los datos como filtro y determinación de las derivadas a partir del polinomio ajustado, para el problema de los regresores no acotados se propone una traslación de los datos respecto a la variable independiente.

Primeramente se presentan dos ejemplos que ilustran el efecto de la estimación de parámetros cuando el modelo no representa adecuadamente el conjunto y cuando los regresores no están acotados.

B.1. Explosión en el error de predicción y en los parámetros

Cuando se pretende ajustar un modelo a un conjunto de datos y el modelo no es adecuado, éste reflejará un error de predicción $y - \hat{y}$ muy grande. El problema anterior puede evitarse si consideramos ajustar el modelo solo a los últimos datos disponibles, con lo que es suficiente considerar un factor de olvido; sin embargo, si el modelo tiene un regresor no acotado el problema que puede presentarse es que los parámetros tiendan a infinito; veamos un ejemplo para cada caso.

Ejemplo 6 (Explosión del error de predicción) Considere que los datos a procesar corresponden a la curva senoidal:

$$y = \sin(t), \tag{B.1}$$

y que el modelo que se pretende ajustar es lineal:

$$\hat{y} = at + b. \tag{B.2}$$

En Fig. B.1 se presenta dicho ajuste en distintos intervalos de t . Se puede apreciar que se obtiene una aproximación “aceptable” en el intervalo $t = [0, \pi/2]$, sin embargo, la recta ajustada para $t = [0, \pi]$ la pendiente de la recta a está muy cerca de cero; a medida de que $t \rightarrow \infty$ la recta ajustada va coincidiendo con el eje t , lo cual ya no dice mucho sobre el sistema cuyos datos se están procesando; mas aún $\int \|y - \hat{y}\|^2 dt \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. $\diamond$

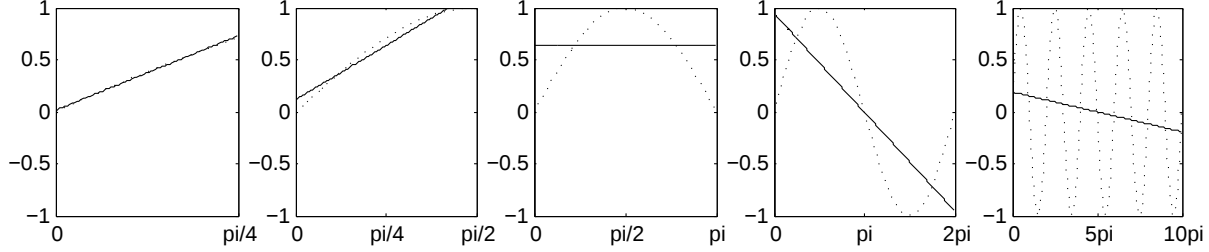


Figura B.1: Tendencia a explosión del error de predicción considerando las abscisas $t = [0, \{\pi/4, \pi/2, \pi, 2\pi, 10\pi\}]$ y las ordenadas: línea punteada $y = \sin(t)$, línea sólida $\hat{y} = at + b$.

La primera idea para resolver el problema del ejemplo 6 es agregar un factor de olvido ajustado a considerar los datos comprendidos en un rango $t_1 - t_0 \leq \pi/2$. Suponiendo un periodo de muestreo $T < \pi/2$, entonces los datos comprendidos en el intervalo $t_1 - t_0 = \pi/2$ es

$$w = \frac{\pi}{2T},$$

y aplicando la ecuación (2.55) se obtiene el factor de olvido necesario:

$$\lambda = \exp\left(-\frac{2T}{\pi}\right). \quad (\text{B.3})$$

La idea para la solución del problema en el ejemplo 6 es tal que el error en el intervalo $[k_\lambda, N]$ esté acotado; se ha podido evitar la *explosión del error de predicción*; sin embargo, la solución al problema por adición de un factor de olvido trae un nuevo problema al que se le refiere como *explosión en los parámetros*.

Ejemplo 7 (Explosión en los parámetros) Tomando nuevamente el problema dado en el ejemplo 6, y considerando el factor de olvido λ tal que el ajuste se priorice para los últimos datos comprendidos en el intervalo $t_f - t = \pi/2$. En Fig. B.2 se muestra el comportamiento de esta estimación y donde, gráficamente, se aprecia la tendencia $|b| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. $\diamond$

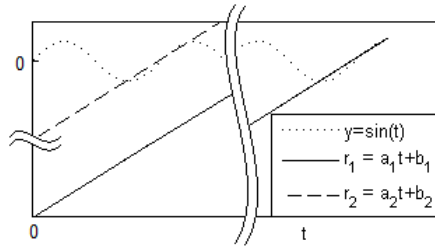


Figura B.2: Explosión de parámetros.

El ejemplo 7 muestra que el problema de explosión pasó de estar en el error de predicción para estar en los parámetros; sin embargo, para el caso particular mostrado en Fig. B.2 se puede ver que las rectas r_1

y r_2 son paralelas, es decir $a_1 = a_2$, el único parámetro que cambió es b_2 respecto a b_1 , pero si la recta r_2 se traslada al punto t donde r_1 fue óptima, veremos que $r_1 = r_2$; ésto sugiere la idea de estimar parámetros por traslación de datos que se desarrolla en el resto de esta sección en el caso particular cuando el ajuste es a un polinomio de grados tres.

B.2. Ajuste de un polinomio de grado tres por traslación de datos

El polinomio ajustado con los parámetros $\Theta = [a \ b \ c \ d]^T$

$$y_t = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad (\text{B.4})$$

tiene parámetros válidos para reproducir el modelo en t ; sin embargo, la traslación de y_t sobre el eje t es posible conservando los parámetros Θ sin modificación. Proponiendo el cambio de variable $\tau = t - \delta$ donde δ es la magnitud del desplazamiento de la curva y_t sobre el eje t , se obtiene:

$$\begin{aligned} y_t &= at^3 + bt^2 + ct + d, \\ y_\tau &= a(\tau_j + \delta)^3 + b(\tau_j + \delta)^2 + c(\tau_j + \delta) + d \\ &= a\tau_j^3 + (3\delta + b)\tau_j^2 + (3\delta^2 + 2\delta b + c)\tau_j + \delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d, \\ &= a_\tau\tau_j^3 + b_\tau\tau_j^2 + c_\tau\tau_j + d_\tau, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

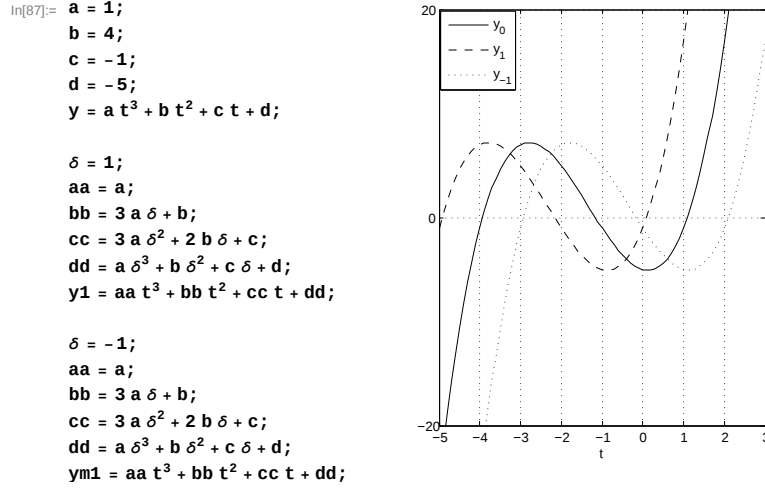
para $j = 1, 2, \dots$ y donde

$$\begin{aligned} a_\tau &= a, \\ b_\tau &= 3a\delta + b, \\ c_\tau &= 3a\delta^2 + 2b\delta + c, \\ d_\tau &= a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

lo que proporciona el modelo ajustado si los datos procesados se hubiesen ubicado en $t - \delta$; ésto permite ajustar parámetros de manera recursiva por traslación directa. A manera de ejemplo, considere las instrucciones en *Wolfram Mathematica* que se muestran en Fig. B.3(a) para el polinomio (B.4) y los parámetros $\Theta_0 = [1 \ 4 \ -1 \ -5]^T$ para obtener dos curvas y_{-1} e y_1 que son la traslación de y con $\delta = -1$ y $\delta = 1$ respectivamente; el resultado se muestra en Fig. B.3(b).

Considerando la estimación de los parámetros del polinomio (B.4) para los datos en el intervalo $[0, \delta]$, se pueden aplicar las ecuaciones (B.6) y obtener los mismos parámetros que se hubiesen obtenido si los datos hubieran estado en el intervalo $t = [-\delta, 0]$. Se puede pensar en aplicar el mismo procedimiento de traslación para todos los datos y de esta manera el algoritmo de estimación de parámetros estará ajustando el polinomio siempre en el intervalo $[0, \delta]$.

Del algoritmo 2 se observa que son necesarios los datos $\hat{\Theta}_{k-1}$, P_{k-1} , y_k , φ_k , λ ; para λ no existe ninguna dificultad pues es constante, y_k son los datos que se están procesando y permanecen sin modificación, $\hat{\Theta}_{k-1}$ es el resultado de la estimación en $k - 1$ y es modificado por las ecuaciones (B.6) cuando $\tau_j = \delta$, φ son los regresores $[\tau_j^3 \ \tau_j^2 \ \tau_j \ 1]$ y cuando τ_j sale del intervalo $[0, \delta]$ se traslada $\tau_{j+1} = \tau_j - \delta$ de manera similar a la primera traslación $\tau_1 = t - \delta$ con la finalidad de que la nueva variable τ_{j+1} siempre esté en el intervalo $[0, \delta]$, finalmente, P_{k-1} es la matriz de covarianza resultado de la estimación en $k - 1$ pero es necesario modificarla cuando $\tau = \delta$ que es el mismo instante cuando los parámetros $\hat{\Theta}_{k-1}$ son modificados para representar la traslación del polinomio.



(a) Programa en Wolfram Mathematica (b) Gráfica de los polinomios de grado tres para trasladar un polinomio de grados tres donde y_1 e y_{-1} están trasladados en t por $\delta = 1$ y $\delta = -1$ respecto a y respectivamente.

Figura B.3: Traslación de un polinomio de grado tres por modificación de los parámetros.

Sabiendo por los desarrollos presentados en la subsección 2.3.3 que

$$P_i = (\Phi_i^T Q_i \Phi_i)^{-1}, \quad \Phi_i = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \end{bmatrix},$$

entonces, cuando se hace la traslación $\tau_1 = t - \delta$, los regresores en Φ_i siempre están en el intervalo $[-\delta, 0]$; por lo que cuando $t = \delta$ se aplica $P_{k-1} = P_\tau$ donde P_τ es una matriz constante definida como

$$P_\tau = \begin{bmatrix} \varphi_{-i} \\ \varphi_{-i+1} \\ \vdots \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{-i}^3 & t_{-i}^2 & t_{-i} & 1 \\ t_{-i+1}^3 & t_{-i+1}^2 & t_{-i+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

mas aún, se puede ver que en el caso más general

$$\tau_j = \tau_{j-1} - \delta = t - j\delta \quad j = 1, 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

Que se interpreta como la traslación τ_j con periodo δ ; sin embargo, la matriz P_τ permanece invariante puesto que la serie de transformaciones $\tau_j = \tau_{j-1} - \delta$ siempre termina en el intervalo $[-\delta, 0]$ que es el intervalo donde está definida la matriz P_τ , por esta razón no es necesario indexar a P_{τ_j} pues siempre se trata de la misma matriz.

En resumen, el ajuste de un polinomio de grado tres por traslación de datos aplicando mínimos cuadrados con factor de olvido consiste en:

1. Mantener los regresores acotados; se establecer un intervalo de operación $[0, \delta]$ para el regresor independiente (t en los ejemplos que se han mostrado).

2. En el momento que el regresor independiente salga del rango $[0, \delta]$, se aplica la traslación (B.8), la transformación (B.6) para $\hat{\Theta}$ y la reinicialización $P_{k-1} = P_\tau$ (B.7).
3. Mantenerse en operación con los datos trasladados hasta que nuevamente el regresor independiente salga del rango $[0, \delta]$, en ese caso repetir desde el punto dos.

Observe que la la solución propuesta en esta sección es tal que el polinomio (B.4) es válido en el instante $t = \delta$ donde los parámetros $\hat{\Theta}$ han ajustado a los datos en el intervalo $[0, \delta]$, ésto se traduce en un retardo de las curvas aproximadas una cantidad δ . Otra manera de explicar éste comportamiento es analizar que en realidad la curva que entrega el algoritmo corresponde al polinomio:

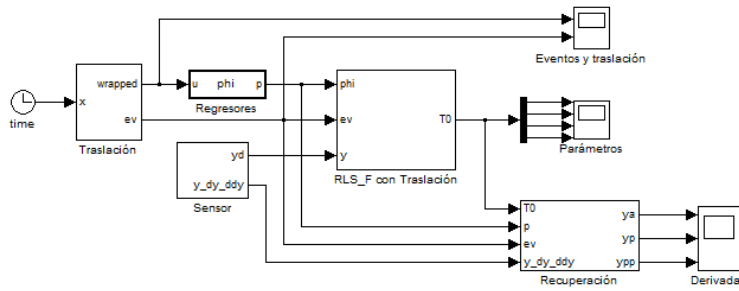
$$y_\tau = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d, \quad (\text{B.9})$$

y por (B.8) vemos que la referencia temporal τ está desfasada $-\delta$ unidades respecto a t . De ésto se concluye que el desfase entre $y_t, \dot{y}_t, \ddot{y}_t$ y $y_\tau, \dot{y}_\tau, \ddot{y}_\tau$ tiende a cero cuando $\delta \rightarrow 0$.

B.3. Programa en Matlab Simulink

En esta sección se presenta la implementación del algoritmo desarrollado en esta sección en lenguaje Matlab Simulink. Por comodidad de desarrollo, está escrito con subsistemas anidados y funciones empotradas de Matlab; sin embargo, está escrito de manera que sea lo mas intuitivo posible y la aplicación a otros sistemas se realice con el menor de modificaciones posibles.

El algoritmo de estimación de la primera y segunda derivada por ajuste de un polinomio de grado tres por mínimos cuadrados con factor de olvido y traslación de los datos trasladados se muestra en Fig. B.3.



(a) Diagrama de bloques.

```
function p = phi(u)
% p = vector de regresores del
% polinomio de tercer grado
p = [u^3 u^2 u 1];
end
```

(b) Embedded MATLAB Function: phi.

Figura B.4: Programa principal en Matlab Simulink y el código de la función empotrada.

El bloque [Traslación] es un subsistema que se encarga de aplicar el *envolvimiento* de t y, aplicando la función de histéresis [Relay], generar los eventos ev cuando $t \geq \delta$; en Fig. B.3 se muestra el código contenido en éste bloque.

El bloque [Sensor] genera la curva $y = \sin t$; sin embargo, con fines de comparación entre las curvas estimadas y las curvas reales, se generan también las curvas $\dot{y} = dy/dt = \cos t$ y $\ddot{y} = d^2y/dt^2 = -\sin t$. Como las derivadas se obtienen numéricamente, observe que la primera derivada para $t_0 = 0$ es $\dot{y} = 1$; no hay forma directa de establecer esta condición inicial para las derivadas; por lo tanto, se reescribe el mismo programa y

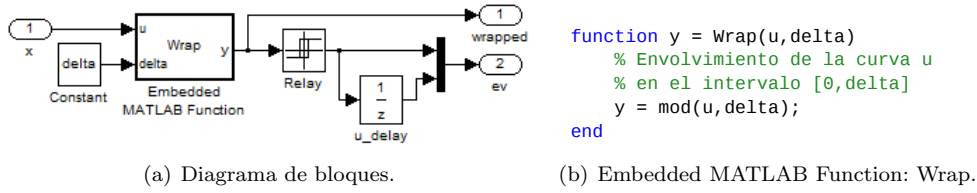


Figura B.5: Subsistema [Traslación].

en vez de derivar se integra. Considerando que $\ddot{y} = -\sin t = \sin(t + \pi)$, en las propiedades del bloque [Sin] se asigna `Phase = pi` y para el primer integrador se le asigna condición inicial igual a uno. En Fig. B.6 se muestra el programa Simulink del bloque [Sensor].

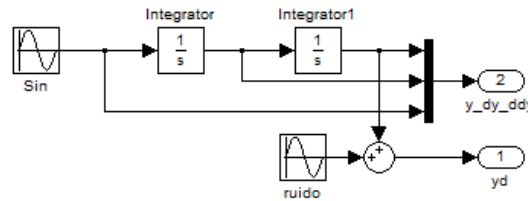


Figura B.6: Diagrama de bloques de subsistema [Sensor].

En Fig. B.7 se muestra el bloque [RLS.F con Traslación] que contiene el algoritmo desarrollado en esta sección. El bloque [Shift] aplica las ecuaciones (B.6) para la modificación de los parámetros y $P_{k-1} = P_\tau$, definida en (B.7), en el instante $t = \delta$. El bloque [RLS.F] es el algoritmo 2 de mínimos cuadrados con factor de olvido.

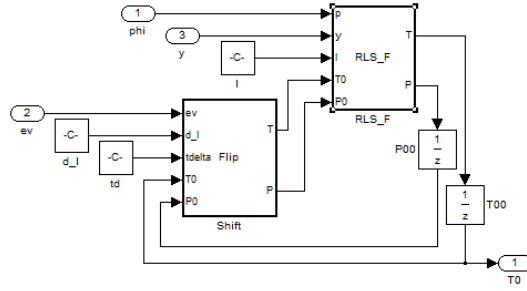
Finalmente, en Fig. B.8 se muestra el contenido del bloque [Recuperación] cuya tarea es muestrear con ayuda del bloque [FncF.F] los parámetros `T0` cuando ocurre un evento `ev=[ev(1)=1 && ev(2)=0]` y mantenerlo memorizado en cualquier otra señal `ev`; posteriormente con ayuda del bloque [Constructor] se construyen las curvas `y0`, `yp`, `ypp` que son las aproximaciones de `y`, `dy`, `ddy`. El bloque [Transport Delay] se incluye para retrasar las señales originales definidas en t y poder comparar con las curvas aproximadas por comparación directa definidas en τ , en las propiedades del bloque [Transport Delay] se configura `Time delay = 0`.

B.4. Validación del algoritmo por prueba en un modelo sintético

Con fines de validación del algoritmo y ejemplo de su funcionamiento, se muestra el ajuste del modelo $y_a = at^3 + bt^2 + ct + d$ a los datos $y = \sin(t)$ con periodo de muestreo $T = 0.1$ cuando no se aplica traslación de datos en la figura B.9, de ésta gráfica se puede observar que $|b|$, $|c|$ y $|d|$ tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$.

Ahora aplicando el algoritmo de traslación de datos, para el mismo ajuste considerado en el párrafo anterior con $\delta = \pi$ y $\lambda = 1$, se obtiene el resultado que se muestra en Fig. B.10(a).

Observe de la gráfica de posición en Fig. B.10(a) que en los instantes $t = j\delta$, $j = 2, 3, \dots$ se alcanzan a ver discontinuidades que se deben a que el polinomio de tercer orden considerado no coincide en los extremos



(a) Diagrama de bloques de subsistema [RLS_F con Traslación].

```
function [T,P] = Flip(ev,d_l,tdelta,T0,P0)
% Modificar parámetros para traslación de curva y reinicialización
% de la matriz de covarianza.
% ev = Vector de evento:
%   ev(1) = Evento en el instante k
%   ev(2) = Evento en el instante k-1
% d_l(1) = delta = Traslación de la curva sobre el eje t
% d_l(2) = lambda = factor de olvido
% tdelta = Vector de tiempo sobre el que se traslada la curva
if ev(1) == 0 && ev(2) == 1;
    N = numel(tdelta);
    PHI = [tdelta.^3 tdelta.^2 tdelta ones([N 1])];
    Q = zeros(N);
    for k=1:N, Q(k,k) = d_l(2)^(N-k); end
    P = inv(PHI'*Q*PHI);
    T = [ T0(1) ;
          3*T0(1)*d_l(1) + T0(2) ;
          3*T0(1)*d_l(1)^2 + 2*T0(2)*d_l(1) + T0(3);
          T0(1)*d_l(1)^3 + T0(2)*d_l(1)^2 + T0(3)*d_l(1) + T0(4)];
else
    T = T0; P = P0;
end
end
```

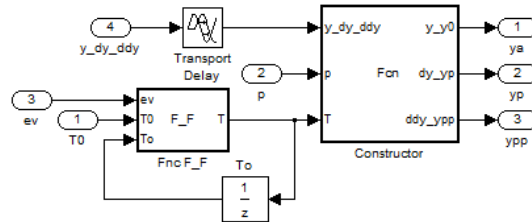
(b) Embedded MATLAB Function: Flip.

```
function [T,P] = RLS_F(p,y,l,T0,P0)
% Algoritmo RLS_F
% (Estimación recursiva por mínimos
% cuadrados con factor de olvido)
K = P0*p'/(1+p'*P0*p');
P = (P0-K*p'*P0)/1;
e = y-p*T0;
T = T0+K*e;
end
```

(c) Embedded MATLAB Function: RLS.F.

Figura B.7: Subsistema [RLS_F con Traslación] y código de las funciones empotradas.

de los intervalos $[t + j\delta, t + (j + 1)\delta]$, $j = 2, 3, \dots$. La propiedad descrita anteriormente se hace más evidente cuando se considera un factor de olvido $\lambda < 1$. Observe cómo mejora el ajuste y se reduce el retardo cuando $\delta \rightarrow 0$, en Fig. B.10(b) y Fig. B.10(c) se muestra el ajuste cuando $\delta = \pi/2$ y $\delta = \pi/6$ respectivamente.



(a) Diagrama de bloques de subsistema [Recuperación].

```
function [y_y0, dy_yp, ddy_ypp] = Fcn(y_dy_ddy, p, T)
% Función que construye los vectores:
% y_y0 = Curva ajustada a y_0
% dy_yp = Aproximación a primera derivada yp
% ddy_ypp = Aproximación a segunda derivada ypp
y_y0 = [y_dy_ddy(1), T(1)*p(1) + T(2)*p(2) + T(3)*p(3) + T(4)];
dy_yp = [y_dy_ddy(2), 3*T(1)*p(2) + 2*T(2)*p(3) + T(3)];
ddy_ypp = [y_dy_ddy(3), 6*T(1)*p(3) + 2*T(2)];
end
```

(b) Embedded MATLAB Function: Fcn.

```
function T = F_F(ev, T0, To)
% Función F_F (Flip-Flop)
% Muestrear T0 cuando ev : 1-->0.
% en cualquier otro caso, mantener To
if ev(1) == 0 && ev(2) == 1;
    T = T0;
else
    T = To;
end
end
```

(c) Embedded MATLAB Function: F_F.

Figura B.8: Subsistema [Recuperación] y código de las funciones empotradas.

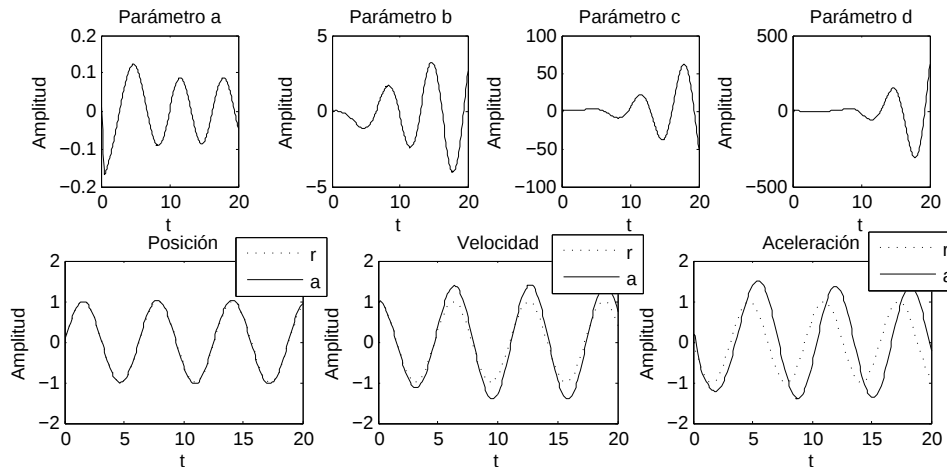
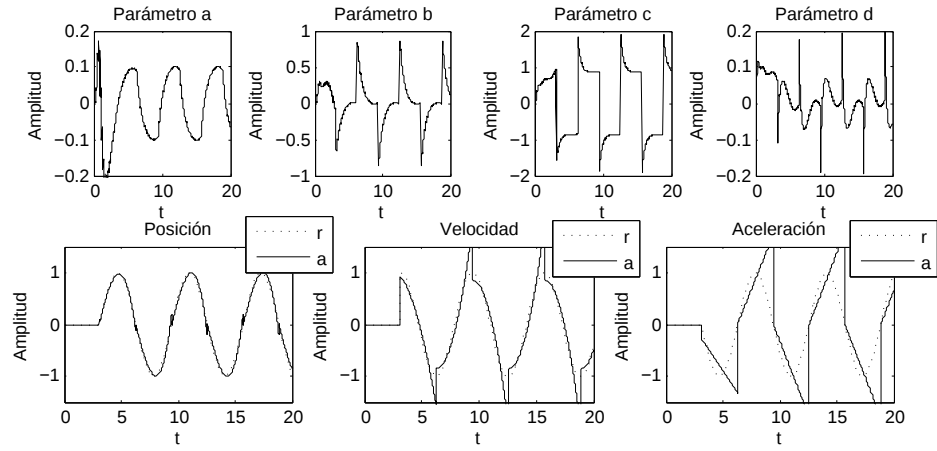
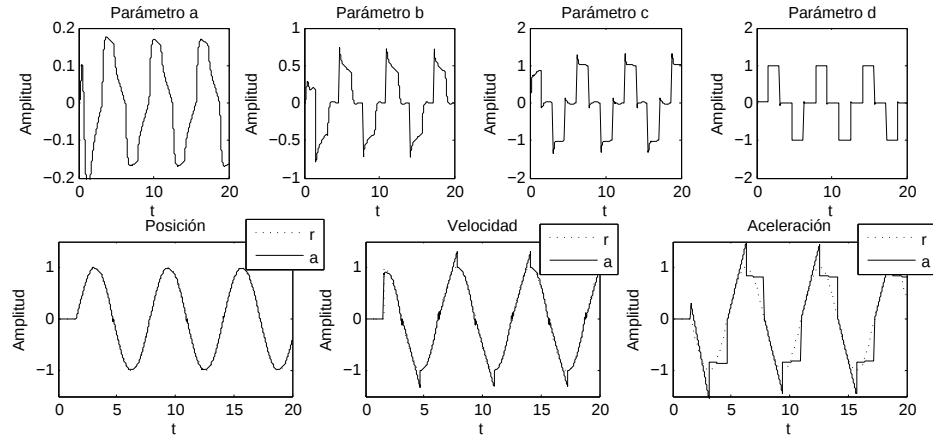
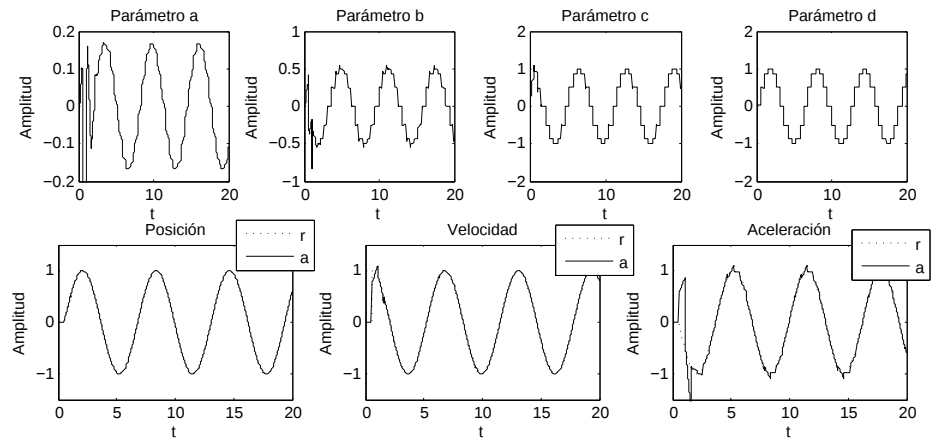


Figura B.9: Explosión de parámetros por ajuste de un polinomio de tercer grado a una curva senoidal.

(a) Ajuste de un polinomio de tercer grado con traslación de datos ($\lambda = 1$, $\delta = \pi$).(b) Ajuste de un polinomio de tercer grado con traslación de datos ($\lambda = 1$, $\delta = \pi/2$).(c) Ajuste de un polinomio de tercer grado con traslación de datos ($\lambda = 1$, $\delta = \pi/6$).Figura B.10: Comportamiento del ajuste cuando $\delta \rightarrow 0$.

Control adaptativo de velocidad para el motor DC

En la práctica, la teoría es otra.

Pazos.

En este apéndice se prueba el funcionamiento del control adaptativo por aplicación a un motor DC. Primero se presentan una serie de diseños considerando diferentes modelos de la planta y diferentes enfoques para el ajuste de los parámetros del controlador. Al final se presentan los resultados experimentales tras la aplicación a un motor de laboratorio descrito en §1.1 y los parámetros obtenidos en §2.6.6.

C.1. Diseño considerando un modelo de primer orden

En esta sección se presenta el diseño de cuatro controladores adaptativos de velocidad basados en un modelo de primer orden del motor DC: adaptación de ganancia y adaptación de parámetros, ambos con enfoque del gradiente negativo del error y teoría de estabilidad de Lyapunov. Estos diseños suponen que el motor puede aproximarse por un modelo lineal de primer orden; en general, para motores pequeños, la inductancia puede despreciarse reduciendo el orden del modelo; una estimación preliminar de los parámetros del motor puede justificar tal afirmación.

C.1.1. Adaptación de ganancia

Considerando el modelo del motor DC con interfaces de entrada y salida $\dot{\omega} = -a\omega + bv$ y los parámetros estimados en §2.6.6 que reescribimos nuevamente como (C.1a) y el modelo de referencia (C.1b):

$$\dot{\omega} = -a\omega + bv \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{p+a}bv = G(p)bv, \quad (\text{C.1a})$$

$$\dot{\omega}_m = -a\omega_m + b_mv_c \quad \rightarrow \quad \omega_m = G(p)b_mv_c, \quad (\text{C.1b})$$

donde $G(p) = 1/(p + a)$, $a = B/J + K^2/(RJ)$, $b = K/(RJ)$ y los parámetros nominales son $a = 3.53$ y $b_m = 3.06$. Resolviendo el problema de diseño con el **enfoque del gradiente negativo del error**, se tiene:

$$\dot{b} = -\Gamma e \omega_m, \quad (C.2)$$

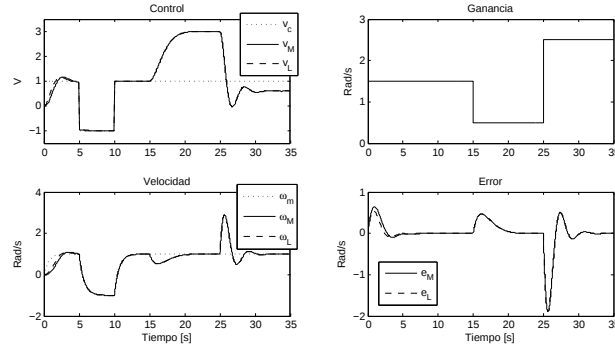
donde $e = \omega - \omega_m$, $\Gamma = \gamma/b_m$ y $\gamma > 0$ es la ganancia de adaptación.

Para resolver con el **enfoque de estabilidad de Lyapunov**; se considera el error $e = \omega - \omega_m = G(p)[b - b_m]v = G(p)\varphi v = G(p)u$, donde $\varphi = b - b_m$ y $u = \varphi v$, que puede representarse en el espacio de estados como:

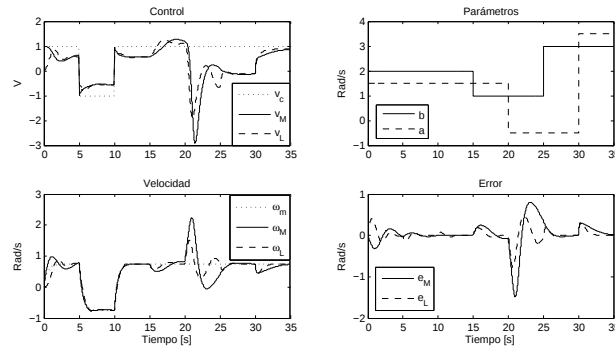
$$\begin{aligned} e &= C(p\mathbb{I} - A)^{-1}Bu, \\ \dot{x} &= Ax + Bu, \\ e &= Cx, \end{aligned} \quad (C.3)$$

donde $A = -a$, $B = b$, $C = 1$, $x = \omega$ y $u = v$. El sistema es asintóticamente estable ya que para $P, Q > 0$, se satisface $A^T P + PA = -Q$ (si se elige $P = 1/b > 0$, entonces $-aP - Pa = -2aP = -2a/b$, donde $Q = 2a/b > 0$). Aplicando la ecuación (3.32), se obtiene:

$$\dot{b} = -\gamma u B^T P x = -\gamma u \underbrace{b(1/b)}_{C=1} x = -\gamma u \underbrace{Cx}_{Cx=e} = -\gamma u e. \quad (C.4)$$



(a) Adaptación de ganancia con enfoque MIT y Lyapunov.



(b) Adaptación de parámetros con enfoque MIT y Lyapunov.

Figura C.1: Control de velocidad adaptativo para el motor DC. Diseño basado en un modelo de primer orden.

C.1.2. Adaptación de parámetros

En el diseño anterior, se considera que el parámetro a se conoce con precisión y es constante por lo que solo se diseñó adaptación para b (la ganancia); en esta ocasión se supondrá que a, b son variables. Considerando el modelo de la planta (C.5a), el modelo de referencia (C.5b) y la señal de control (C.5c):

$$\dot{\omega} = -a\omega + bv, \quad (\text{C.5a})$$

$$\dot{\omega}_m = -a_m\omega_m + b_mv_c, \quad (\text{C.5b})$$

$$v = \frac{a - a_m}{b}\omega + \frac{b_m}{b}v_c = \theta_1\omega + \theta_2v_c = \Theta^T \begin{bmatrix} \omega \\ v_c \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5c})$$

para el error definido como $e = \omega - \omega_m$ se puede resolverse el problema de adaptación de los parámetros Θ con el **enfoque del gradiente negativo del error** con lo que se obtiene:

$$\dot{\Theta} = -\gamma e \frac{b}{p + a_m} \begin{bmatrix} \omega \\ v_c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Otra alternativa de diseño es resolver con el **enfoque de estabilidad de Lyapunov** con lo que se obtiene:

$$\dot{\Theta} = -\gamma e \begin{bmatrix} \omega \\ v_c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

C.2. Diseño considerando un modelo de segundo orden

En esta sección se presenta el diseño de cinco controladores adaptativos de velocidad para un motor DC basados en un modelo lineal de segundo orden. Los dos primeros diseños son para adaptación de ganancia con el enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov; los siguientes dos diseños consisten en la solución para dos ecuaciones de primer orden (subsistema eléctrico y mecánico) aplicando nuevamente el enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov; finalmente el último diseño consiste en la aplicación del enfoque del gradiente negativo del error para una ecuación de segundo orden.

C.2.1. Adaptación de ganancia

Partiendo de la representación del sistema por (C.8a), es posible diseñar un control adaptativo por adaptación de una ganancia siguiendo el modelo de referencia (C.8b):

$$\omega = G_2(p)\theta v, \quad (\text{C.8a})$$

$$\omega_m = G_2(p)\theta_mv_c = G_2(p)v_c, \quad (\text{C.8b})$$

donde $G_2(p) = K/((Lp + R)(Jp + B) + K^2)$ (ver §1.1), θ es una ganancia variable y $\theta_m = 1$ una ganancia de referencia. Definiendo el error de seguimiento de modelo como $e = \omega - \omega_m$ y aplicando el **enfoque del gradiente negativo del error** para resolver el problema de adaptación de la ganancia θ se obtiene:

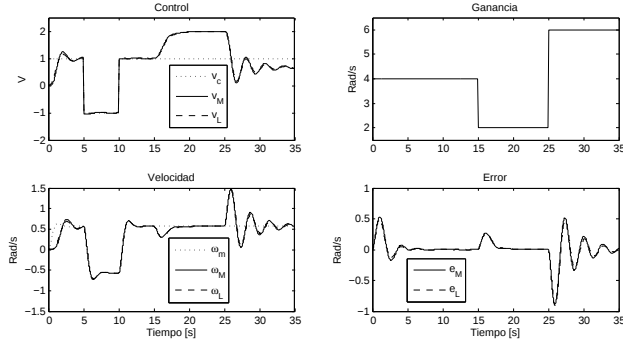
$$\dot{\theta} = -\gamma e \nabla_{\theta} e = -\gamma e \omega_m. \quad (\text{C.9})$$

Otra alternativa es considerar el **enfoque de estabilidad de Lyapunov**; si se toma como referencia el modelo de segundo orden con estados ω , $\dot{\omega}$, entonces se puede elegir la matriz P como:

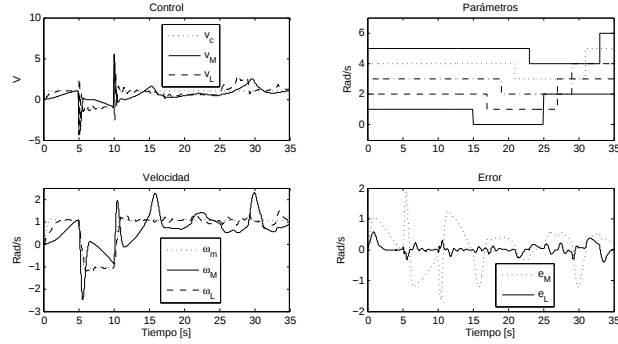
$$P = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}}{LJ} & \frac{p_{12}}{K} \\ \frac{LJ}{K} & 0 \end{bmatrix}$$

para ciertas $p_{11} > 0$, $p_{12} < 0$ y $Q > 0$ se satisface que $P > 0$, $A^T P + PA = -Q$ y $B^T P = C$. Podemos aplicar la regla de adaptación de parámetros (C.10).

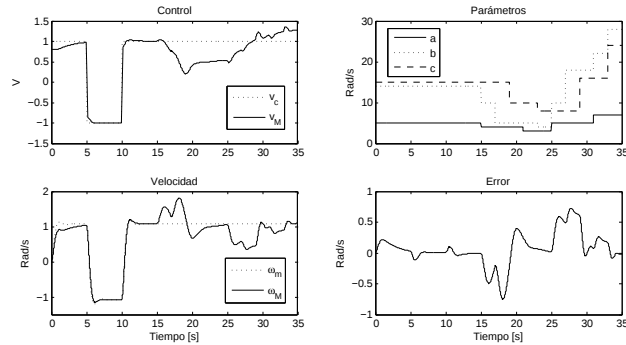
$$\dot{\theta} = -\gamma u_c^T B^T P x = -\gamma u_c C x = -\gamma u_c e. \quad (C.10)$$



(a) Adaptación de ganancia con enfoque MIT y Lyapunov.



(b) Adaptación de parámetros con enfoque MIT y Lyapunov (estados ω , i).



(c) Adaptación de parámetros con enfoque MIT (estados ω , $\dot{\omega}$).

Figura C.2: Control de velocidad adaptativo para el motor DC. Diseño basado en un modelo de segundo orden.

C.2.2. Adaptación de parámetros (estados ω , i)

Para el diseño de este controlador, se considera el modelo (1.2) que se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -a_{11}i - a_{12}\omega + a_{13}v, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -a_{21}\omega + a_{22}i,\end{aligned}\tag{C.11}$$

donde $a_{11} = R/L$, $a_{12} = K/L$, $a_{13} = 1/L$, $a_{21} = B/J$, $a_{22} = K/J$. Por simplificación se reescribe nuevamente como:

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= -a_i y_i + u_i; \quad a_i = a_{11}, \quad u_i = a_{13}v - a_{12}\omega, \\ \dot{y}_\omega &= -a_\omega y_\omega + b_\omega u_\omega; \quad a_\omega = a_{21}, \quad b_\omega = a_{22}, \quad u_\omega = i.\end{aligned}\tag{C.12}$$

Subsistema eléctrico: Considerando la ecuación (C.13a) y al modelo de referencia (C.13b) donde se desea que $\{y_i, y_i\} \rightarrow \{\dot{y}_i^m, y_i^m\}$. La señal de control u_i debe ser (C.13c).

$$\dot{y}_i = -a_i y_i + u_i, \tag{C.13a}$$

$$\dot{y}_i^m = -a_i^m y_i^m + u_i^c, \tag{C.13b}$$

$$u_i = \alpha_i y_i + \beta_i u_i^c; \quad \alpha_i = a_i - a_i^m, \quad \beta_i = b_i^m, \quad \Theta_i = [\alpha_i \quad \beta_i]^T. \tag{C.13c}$$

Sustituyendo (C.13c) en (C.13a) y despejando i se obtiene:

$$y_i = \frac{\beta_i u_i^c}{p + a_i - \alpha_i} = \frac{\eta_i}{\delta_i}, \quad p = \frac{d}{dt}. \tag{C.14}$$

Aplicando la regla de adaptación de parámetros por el **enfoque del gradiente negativo del error** se obtiene:

$$\dot{\Theta}_i = -\lambda_i e_i \nabla_{\Theta_i} = -\lambda_i e_i \frac{1}{p + a_i^m} \begin{bmatrix} y_i \\ u_i^c \end{bmatrix}; \quad e_i = y_i - y_i^m. \tag{C.15}$$

Alternativamente se puede resolver con el **enfoque de estabilidad de Lyapunov** con lo que se obtiene:

$$\dot{\Theta}_i = -\lambda_i e_i \begin{bmatrix} y_i \\ u_i^c \end{bmatrix}. \tag{C.16}$$

Subsistema mecánico: Considerando la ecuación (C.17a) y al modelo de referencia (C.17b) donde se desea que $\{y_\omega, y_\omega\} \rightarrow \{\dot{y}_\omega^m, y_\omega^m\}$ por lo que la señal de control u_ω debe ser (C.17c).

$$\dot{y}_\omega = -a_\omega y_\omega + b_\omega u_\omega, \tag{C.17a}$$

$$\dot{y}_\omega^m = -a_\omega^m y_\omega^m + b_\omega^m u_\omega^c, \tag{C.17b}$$

$$u_\omega = \alpha_\omega y_\omega + \beta_\omega u_\omega^c; \quad \alpha_\omega = \frac{a_\omega - a_\omega^m}{b_\omega}, \quad \beta_\omega = \frac{b_\omega^m}{b_\omega}, \quad \Theta_\omega = [\alpha_\omega \quad \beta_\omega]^T. \tag{C.17c}$$

Sustituyendo (C.17c) en (C.17a) y despejando ω , se obtiene:

$$y_\omega = \frac{b_\omega \beta_\omega u_\omega^c}{p + a_\omega - b_\omega \alpha_\omega} = \frac{\eta_\omega}{\delta_\omega}. \tag{C.18}$$

Aplicando la regla de adaptación de parámetros por el **enfoque del gradiente negativo del error**, se obtiene:

$$\dot{\Theta}_\omega = -\lambda_\omega e_\omega \nabla_{\Theta_\omega} = -\lambda_\omega e_\omega \frac{b_\omega}{p + a_\omega^m} \begin{bmatrix} y_\omega \\ u_\omega^c \end{bmatrix}; \quad e_\omega = y_\omega - y_\omega^m. \tag{C.19}$$

Alternativamente se puede resolver con el **enfoque de estabilidad de Lyapunov** con lo que se obtiene:

$$\dot{\Theta}_\omega = -\lambda_\omega e_\omega \begin{bmatrix} y_\omega \\ u_\omega^c \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

Se propone que los controladores establecidos para los subsistemas eléctrico y mecánico sean acoplados en la estructura que se muestra en Fig. C.3 donde $A1$ y $A2$ representan el control adaptativo del subsistema eléctrico y mecánico respectivamente.

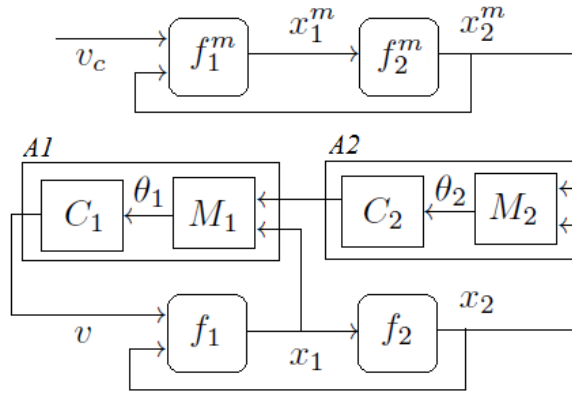


Figura C.3: Control adaptativo para el motor DC

C.2.3. Adaptación de parámetros (estados ω , $\dot{\omega}$)

Para el diseño de éste controlador, se considera la ecuación (C.21), el modelo de referencia (C.22) y la señal de control (C.23):

$$\ddot{\omega} = -a\dot{\omega} - b\omega + cv; \quad \text{donde} \quad a = a_{21} + a_{11}, \quad b = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}, \quad c = a_{13}a_{22}, \quad (\text{C.21})$$

$$\ddot{\omega}_m = -a_m\dot{\omega}_m - b_m\omega_m + c_mv_c, \quad (\text{C.22})$$

$$v = \alpha\dot{\omega} + \beta\omega + \gamma v_c; \quad \alpha = \frac{a - a_m}{c}, \quad \beta = \frac{b - b_m}{c}, \quad \gamma = \frac{c_m}{c}. \quad (\text{C.23})$$

Sustituyendo la señal de control v (C.23) en (C.21) y despejando ω se obtiene:

$$\omega = \frac{c\gamma v_c}{p^2 + (a - c\alpha)p + b - c\beta}.$$

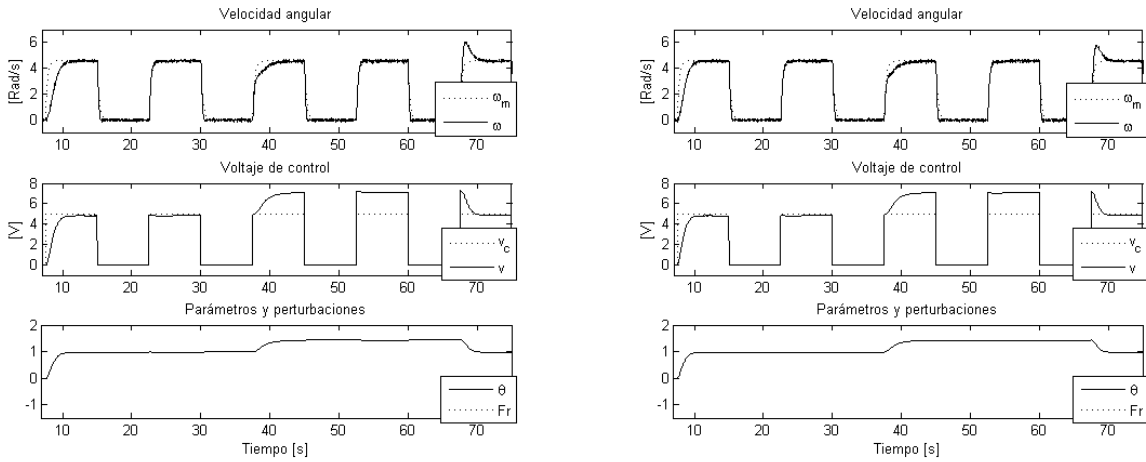
Aplicando la regla de adaptación de parámetros con el enfoque del gradiente negativo del error, se obtiene:

$$\dot{\theta} = -\lambda e \frac{c}{p^2 + a_m p + b_m} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \omega \\ v_c \end{bmatrix}; \quad e = \omega - \omega_m.$$

C.3. Implementación en una planta real y resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos de la implementación en el motor DC descrito en §1.1. El modelo que se considera es lineal y de primer orden con los parámetros estimados en §2.6 para el caso de interfaces simplificadas. Los controladores que se prueban son cuatro, los primeros dos son por adaptación de ganancia y los siguientes dos son por adaptación de parámetros, ambos con enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov. Para verificar la capacidad de adaptación, se aplica y se retira el freno para el mecanismo de poleas en el motor.

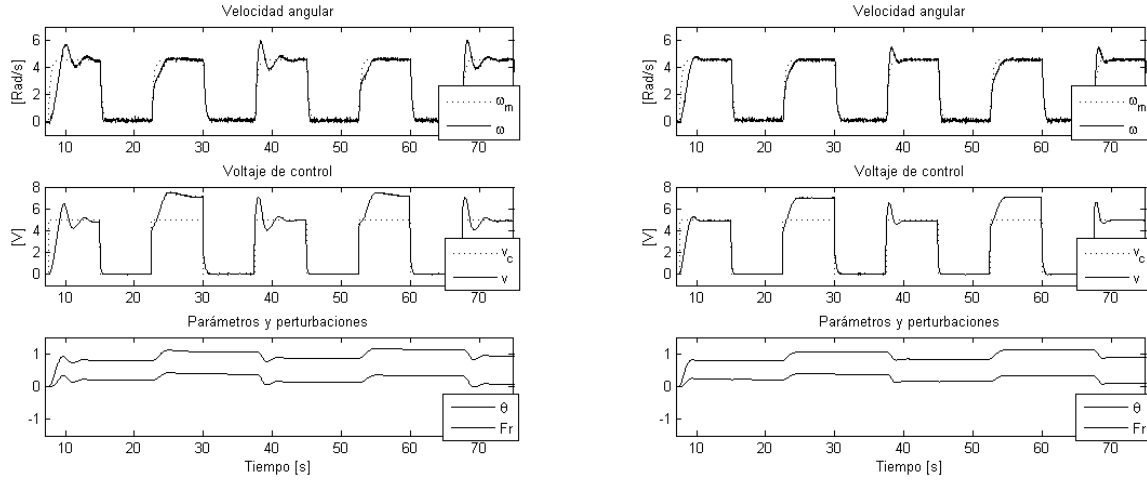
En Fig. C.4 se muestra el resultado de la implementación del control de velocidad adaptativo por adaptación de ganancia con enfoque del gradiente negativo del error Fig. C.4(a) y estabilidad de Lyapunov Fig. C.4(b). La curva ω_m es la salida del modelo de referencia y ω es la respuesta del motor; v_c es el control nominal y v es el control aplicado al motor; θ es la ganancia de adaptación. El freno es aplicado en $t = 35$ seg. y es retirado en $t = 65$ seg.



(a) Control adaptativo de velocidad por adaptación de ganancia con enfoque MIT. (b) Control adaptativo de velocidad por adaptación de ganancia con enfoque de estabilidad de Lyapunov.

Figura C.4: Implementación de control de velocidad adaptativo por adaptación de ganancia con enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov.

En Fig. C.5 se muestra el resultado de la implementación del control de velocidad adaptativo por adaptación de parámetros con enfoque del gradiente negativo del error Fig. C.5(a) y estabilidad de Lyapunov Fig. C.5(b). La curva ω_m es la salida del modelo de referencia y ω es la respuesta del motor; v_c es el control nominal y v es el control aplicado al motor; θ es la ganancia de adaptación (no se muestra el parámetro de fricción). El freno es aplicado en $t = 35$ seg. y es retirado en $t = 65$ seg.



(a) Control adaptativo de velocidad por adaptación de parámetros con enfoque MIT. (b) Control adaptativo de velocidad por adaptación de parámetros con enfoque Lyapunov.

Figura C.5: Implementación de control de velocidad adaptativo por adaptación de parámetros con enfoque del gradiente negativo del error y estabilidad de Lyapunov.

C.4. Conclusiones

Desde la etapa de diseños, se puede apreciar que el enfoque de estabilidad de Lyapunov presenta un mejor rendimiento frente al enfoque del gradiente negativo del error y puede interpretarse como la presencia del filtro (función de transferencia) presente en el enfoque del gradiente negativo del error lo cual le agrega dinamismo al controlador. El controlador adaptativo por estabilidad de Lyapunov no incluye tal filtro por lo cual no incrementa el orden del sistema en lazo cerrado.

Para la implementación, se hace evidente que el incremento en el número de parámetros a adaptar agrega orden al sistema en lazo cerrado; en Fig. C.4 se aprecian transientes típicos de un sistema de primer orden, a diferencia de los transientes en Fig. C.5 donde con claridad corresponden a un sistema de segundo orden (sub-amortiguado).

Tanto el control por adaptación de ganancia como por adaptación de parámetros lo gran el objetivo de adaptación; sin embargo, el control por adaptación de ganancia es el más simple de implementar y el que mejor resultados presenta respecto a estabilidad.

Preliminares matemáticos y definiciones básicas

Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.

Henry-Louis Mencken

Con la finalidad de que la lectura de este trabajo pueda seguirse con un menor grado de consulta a referencias externas, en éste apéndice se presentan algunos conceptos y definiciones básicas con la finalidad de que el contenido de este trabajo sea autosuficiente en la medida de lo que sea posible.

D.1. Elementos matemáticos

Definición 7 (Espacio vectorial lineal). Un espacio vectorial lineal sobre el campo $\mathfrak{R}$ es un conjunto χ no vacío, que tiene definidas en el dos aplicaciones:

1. Suma $+$: $\chi \times \chi \rightarrow \chi$,
2. Multiplicación escalar $\cdot$: $\mathfrak{R} \times \chi \rightarrow \chi$,

y que tienen las siguientes propiedades:

Sean $x, y, z \in \chi$, entonces
 $x + y = y + x$,
 $x + (y + z) = (x + y) + z$,
 $\exists 0 \in \chi : x + 0 = x, \forall x \in \chi$,
 $\exists -x \in \chi : x + (-x) = 0, \forall x \in \chi$.

Sean $a, b \in \mathfrak{R}$ y $x, y \in \chi$, entonces
 $a(bx) = (ab)x$,
 $\exists 1 \in \mathfrak{R} : 1x = x$,
 $a(x + y) = ax + ay$,
 $(a + b)x = ax + bx$.



Definición 8 (Espacio lineal normado). Un espacio lineal X sobre $\mathbb{R}$ es normado si, para cada vector $x \in X$ existe una norma de valor real $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$. El par $(X, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado* y cuando no haya lugar a confusión lo denotaremos por X . Si no está claro bajo qué contexto $\|\cdot\|$ es una norma en X o una norma en $\mathbb{R}^n$, escribiremos $\|\cdot\|_X$ para la norma en X . ♣

Definición 9 (Subconjunto abierto). Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *abierto* si, para cada vector $x \in S$, uno puede encontrar una vecindad- ε de x :

$$N(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \varepsilon\}$$

tal que $N(x, \varepsilon) \subset S$. ♣

Definición 10 (Subconjunto cerrado). Un conjunto S es *cerrado* sí su complemento en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n - S$) es abierto. De manera equivalente, S es cerrado sí toda secuencia $\{x_k\}$ con elementos en S converge a un punto en S . ♣

Definición 11 (Conjunto acotado). Un conjunto S es acotado si existe $r > 0$ tal que $\|x\| \leq r \forall x \in S$. Un conjunto S es *compacto* si es cerrado y está acotado. ♣

Definición 12 (Punto frontera). Un punto p es un punto frontera del conjunto S si cualquier vecindad de p contiene al menos un punto de S y uno punto que no pertenece a S . El conjunto de todos los puntos frontera de S , denotado por ∂S , es llamado la frontera de S . Un conjunto cerrado tiene todos sus puntos frontera, un conjunto abierto no contiene puntos frontera. ♣

Definición 13 (Interior de un conjunto). El *interior* de un conjunto S es $S - \partial S$; un conjunto abierto es igual a su interior. La cerradura de un conjunto S , denotado por $\bar{S}$ es la unión de S y su frontera; un conjunto cerrado es igual a su cerradura. ♣

Definición 14 (Conjunto conexo). Un conjunto abierto es *conexo* si cada par de puntos en S puede ser unido por una curva poligonal y ésta está contenida en S . Un conjunto S es llamada una *región* si éste es la unión de un conjunto abierto conexo, con él mismo, ninguno o todos los puntos frontera. ♣

Si ninguno de los puntos frontera están incluidos, la región es llamada región abierta o *dominio*.

Definición 15 (Espacio de Banach). Un espacio lineal normado χ es *completo* si toda secuencia de Cauchy converge a un vector en χ . Un espacio lineal normado completo es un *espacio de Banach*. ♣

Definición 16 (Espacios euclidianos). El conjunto de todos los vectores n -dimensionales $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ definen un espacio n -dimensional denotado por $\mathbb{R}^n$. En los espacio euclidianos, además de la suma y la multiplicación por un escalar, está definido el producto interno entre $x, y \in \mathbb{R}^n$ como

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

♣

La norma $\|x\|$ de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ en un espacio euclidiano es una función escalar con las propiedades:

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, con $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \{\lambda, x\} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\}$.

Se van a considerar las normas ℓ_p definidas como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Todas las normas ℓ_p son equivalente en el sentido de que si $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son dos normas ℓ_p diferentes, entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para las normas ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_∞ las desigualdades anteriores toman la forma:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Un importante resultado respecto a las normas ℓ_p es la *desigualdad de Hölder*:

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Un caso particular de la desigualdad de Hölder es la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*:

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ define un mapeo lineal $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en la forma $y = Ax$. La norma ℓ_p inducida de A es definida por:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,$$

que para los casos particulares ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_∞ está dado por:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

donde $\lambda_{\max}(A^T A)$ es el máximo eigenvalor de $A^T A$. Considerando las matrices $\{A, B\} \in \{\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}^{n \times q}\}$, se pueden describir algunas propiedades útiles de las normas matriciales inducidas anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty, & \frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1, \\ \|A\|_2 &\leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}, & \|AB\|_p &\leq \|A\|_p \|B\|_p. \end{aligned}$$

Definición 17 (Convergencia de secuencias). Una secuencia de vectores $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\} \in \mathbb{R}^n$ denotado por $\{x_k\}$, se dice que es convergente a un vector límite x si:

$$\|x_k - x\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

que es equivalente a decir que, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que:

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

.



Definición 18 (Secuencia de Cauchy). Una secuencia $\{x_k\} \in \chi$ se dice *secuencia de Cauchy* si

$$\|x_m - x_k\| \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty. \tag{D.1}$$

Notar que toda secuencia convergente es Cauchy, pero no toda secuencia de Cauchy es convergente.



Definición 19 (Punto de acumulación). Un vector x es un punto de acumulación de una secuencia $\{x_k\}$ si existe un subconjunto infinito K de números enteros no negativos tales que $\{x_k\}_{k \in K}$ convergen a x . Una secuencia acotada $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación. ♣

Una secuencia de números reales $\{r_k\}$ se dice que es creciente (monóticamente creciente o no decreciente) si $r_k \leq r_{k+1} \forall k$. Si $r_k < r_{k+1}$ se dice que es estrictamente creciente. De manera similar se define la secuencia decreciente y estrictamente decreciente.

Definición 20 (Segmento de línea). Sean $x, y \in S$. Se llama *segmento de línea abierto* que une x e y al conjunto

$$L(x, y) = \{z \in X | z = \lambda x + (1 - \lambda)y\} \quad \text{donde } 0 < \lambda < 1,$$

y *segmento de línea cerrado* que une x e y al conjunto

$$L[x, y] = \{z \in X | z = \lambda x + (1 - \lambda)y\} \quad \text{donde } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

♣

Un conjunto S se dice que es *convexo* sí para todo $x, y \in S$ el segmento $[x, y]$ está contenido en S .

D.2. Análisis

D.2.1. Función continua

Una función f es una aplicación que mapea desde un conjunto S_1 a otro conjunto S_2 y es denotado por $f : S_1 \rightarrow S_2$. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es *continua* en un punto x si $f(x_k) \rightarrow f(x)$ cuando $x_k \rightarrow x$. De manera equivalente, f es continua en x , si dado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon. \quad (\text{D.2})$$

Una función f es continua en un conjunto S si $f(x) \forall x \in S$ es continua. Una función f es *uniformemente continua* en S si, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que depende únicamente de ε tal que (D.2) se mantenga para todo $x, y \in S$.

Note que la continuidad uniforme es definida en un conjunto, mientras que la continuidad es definida en un punto. Para la continuidad uniforme, la misma constante δ es válida para todos los puntos del conjunto.

Claramente, si f es uniformemente continua en un conjunto S , entonces, es continua en S ; la afirmación contraria generalmente no es cierta. Sin embargo, si S es un conjunto compacto, entonces la continuidad y continuidad uniforme en S es equivalente. La función:

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\cdot) = a_1 f_1(\cdot) + a_2 f_2(\cdot),$$

es continua para dos escalares cualquiera $\{a_1, a_2\}$ y dos funciones continuas cualquiera $\{f_1, f_2\}$.

Si S_1, S_2 y S_3 son tres conjuntos cualquiera y $f_1 : S_1 \rightarrow S_2$ y $f_2 : S_2 \rightarrow S_3$ son funciones, entonces la función $f_2 \circ f_1 : S_1 \rightarrow S_3$, definida por:

$$(f_2 \circ f_1)(\cdot) = f_2(f_1(\cdot)),$$

es llamada la *composición* de f_1 y f_2 . La composición de dos funciones continuas es continua.

Si $S \subset \mathbb{R}^n$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces el conjunto de $f(x) \forall x \in S$ es llamado la imagen de S bajo f y es denotado por $f(S)$.

Si f es una función continua definida en un conjunto compacto S , entonces $f(S)$ es compacto; por lo tanto, funciones continuas en conjunto compactos son acotados. Mas aún, si f es una función escalar real, es decir $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existen puntos $\{p, q\}$ en el conjunto compacto S tales que $f(x) \leq f(p)$ y $f(x) \geq f(q)$ para todo $x \in S$.

Si f es una función continua definida en un conjunto conexo S , entonces $f(S)$ es conexo. Una función f definida en un conjunto S se dice que es *uno a uno* en S si para $x, y \in S$ $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua y uno a uno en un conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces f tiene función continua inversa f^{-1} en $f(S)$. La composición de f y f^{-1} es la identidad, es decir $f^{-1}(f(x)) = x$.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es *continua a trozos* en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ si para todo subintervalo acotado $J_0 \subset J$, f es continua para todo $x \in J_0$, excepto, posiblemente un número finito de punto donde f puede ser discontinua. Mas aún, para cada punto de discontinuidad x_0 , el lado derecho del límite $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$ y el lado izquierdo del límite $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$ existen.

D.2.2. Funciones diferenciables

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *diferenciable* en x si el límite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe.

Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice ser *continuamente diferenciable* en un punto x_0 si la derivada parcial $\partial f_i / \partial x_j$ existe y es continua en x_0 para $i = \overline{1, m}$ y $j = \overline{1, n}$. Una función f es continuamente diferenciable en un conjunto S si $f(x)$ es continuamente diferenciable $\forall x \in S$.

Definición 21 (Gradiente). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, el gradiente del *campo escalar* f es el vector $\nabla f(x)$ y se escribe como:

$$\nabla f(x) := \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T.$$



Algunas propiedades del gradiente son:

- $\nabla f(x)$ muestra la dirección de máxima pendiente del campo escalar f en el punto x ,
- $\|\nabla f(x)\|$ es la pendiente de la función $f(x)$ en el punto x ,
- $\nabla f(x)$ se puede interpretar como la primera derivada de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 22 (Matriz Hessiana). Sea la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, se define la matriz Hessiana de $f(x)$ como:

$$H_f(x) := \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} f(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

♣

Algunas propiedades de la matriz Hessiana son

- es simétrica,
- puede interpretarse como la segunda derivada de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 23 (Matriz Jacobiana). Sea una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable, la matriz $m \times n$

$$J_f(x) := \begin{bmatrix} \nabla^T f_1(x) \\ \nabla^T f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla^T f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (\text{D.3})$$

es la matriz jacobiana de f .

♣

Suponga que $S \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$, f es continuamente diferenciable en $x_0 \in S$, $g : f(S) \rightarrow \mathbb{R}^k$ y g es continuamente diferenciable en $f(x_0)$; entonces la función $h : S \rightarrow \mathbb{R}^k$, definida por $h(x) = g(f(x))$, es continuamente diferenciable en x_0 y su matriz jacobiana está dada por la *regla de la cadena*:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial f} \right|_{f=f(x_0)} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

Teorema 6 (Valor medio): Asumiendo que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en cada punto x de un conjunto abierto $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $x, y \in S$ $x \neq y$ tales que el segmento de línea abierto $L(x, y) \subset S$. Entonces existe al menos un punto z de $L(x, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} (y - x).$$

♦

Teorema 7 (Función implícita): Asumiendo que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable en cada punto (x, y) de un conjunto abierto $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Sea $(x_0, y_0) \in S$ para el que $f(x_0, y_0) = 0$ y para el que la matriz jacobiana $[\partial f / \partial x](x_0, y_0)$ es no singular. Entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 y $V \subset \mathbb{R}^m$ de y_0 tal que para cada $y \in V$ la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene solución única $x \in U$. Mas aún, esta solución puede darse como $x = g(y)$, donde g es continuamente diferenciable en $y = y_0$.

♦

Lema 2 (Desigualdad de Gronwall-Bellman): Sea $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. Si una función continua $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s) ds,$$

para $a \leq t \leq b$, entonces en el mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s) \mu(s) \exp \left[\int_s^t \mu(\tau) d\tau \right] ds.$$

En particular, si $\lambda \equiv \lambda$ es una constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda \exp \left[\int_a^t \mu(\tau) d\tau \right].$$

Si, adicionalmente, $\mu(t) \equiv \mu \geq 0$ es una constante, entonces:

$$y(t) \leq \lambda \exp [\mu(t - a)].$$

♠

D.2.3. Mapeo contractivo

Considere una ecuación de la forma $x = T(x)$. Una solución x^* de esta ecuación se conoce como *punto fijo* del mapeo T . Una idea clásica para encontrar un punto fijo es por el método de aproximaciones sucesivas. El teorema de mapeo contractivo da suficientes condiciones bajo las cuales existe un punto fijo x^* de $x = T(x)$ y la secuencia $\{x_k\}$ convergente a x^* . El teorema es válido, no solo cuando T mapea entre espacio euclidianos, sino también cuando T mapea entre *espacio de Banach*.

Teorema 8 (Mapeo de contracción): Sea S un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X y sea $T : S \rightarrow S$. Suponga que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

entonces:

- existe un único vector $x^* \in S$ que satisface $x^* = T(x^*)$, y
- x^* puede ser obtenido por el método de aproximaciones sucesivas, iniciando desde cualquier vector inicial arbitrario en S . ♦

D.2.4. Existencia y unicidad

Para los fines de control, es necesario un modelo matemático que reproduzca con suficiente aproximación el sistema o fenómeno físico que se está estudiando. Por lo general, se emplea un modelo que consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la forma

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{D.4}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado y $f : [0, \infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. En esta sección se presentan las propiedades fundamentales de (D.4) como son la existencia, la unicidad, la dependencia continua respecto a las condiciones iniciales y a los parámetros.

Teorema 9 (Existencia local y unicidad): Sea $f(t, x)$ continua a trozos en t y que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

entonces, existe $\delta > 0$ tal que $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una solución única en $[t_0, t_0 + \delta]$. ♦

Lema 3 (La cota de la derivada es la constante de Lipschitz): Sea $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua para algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\partial f / \partial x$ existe y es continua en $[a, b] \times D$. Si, para algún subconjunto convexo $W \subset D$, existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L,$$

en $[a, b] \times W$, entonces

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall \{t, x, y\} \in \{[a, b], W, W\}. \spadesuit$$

Lema 4 (C^1 implica Lipschitz): Si $f(t, x)$ y $[\partial f / \partial x](t, x)$ son continuas en $[a, b] \times D$, para algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es localmente Lipschitz en x en $[a, b] \times D$. ♠

Lema 5 (Condiciones para Lipschitz global): Si $f(t, x)$ y $[\partial f / \partial x](t, x)$ son continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, entonces f es globalmente Lipschitz en x en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ si $\partial f / \partial x$ está uniformemente acotada en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. ♠

Teorema 10 (Existencia global y unicidad): Supongamos que $f(t, x)$ es continua a trozos en t y satisface:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

entonces la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una solución única en $[t_0, t_1]$. ♦

Teorema 11 (Existencia global y unicidad de vuelta): Sea $f(t, x)$ una función continua a trozos en t y localmente Lipschitz en x para todo $t \geq t_0$ y todo $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Sea W un subconjunto compacto de D , $x_0 \in W$, y supongamos que se sabe que toda solución de $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ se encuentra totalmente en W . Entonces existe una única solución que es definida para todo $t \geq t_0$. ♦

D.2.5. Dependencia continua respecto a condiciones iniciales y parámetros

Para que la solución de la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ sea de interés, debe depender continuamente del instante inicial t_0 , el estado inicial x_0 y la propia función $f(t, x)$ (a los parámetros).

Por dependencia continua de la condición inicial se entiende que la solución $x(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ que comienza en $x(t_0) = x_0$ definida en el intervalo compacto $[t_0, t_1]$; dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_0 \in B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ tiene una solución única $z(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$ y satisface $\|z(t) - x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Para definir dependencia continua de f respecto a los parámetros, vamos a precisar en qué forma f es perturbada. Suponiendo que f depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes, es decir $f = f(t, x, \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Sea $x(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda_0) = x_0$. Se dice que la solución depende continuamente de λ si dado $\epsilon > 0$ tal que para todo λ en la bola $\{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $x(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda) = x_0$ y satisface $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Teorema 12: Sea $f(t, x)$ seccionalmente continua en t y Lipschitz en x en $[t_0, t_1] \times W$, con constante de Lipschitz L , donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sean $y(t)$ y $z(t)$ soluciones de

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f(t, y), & y(t_0) &= y_0, \\ \dot{z} &= f(t, z) + g(t, z), & z(t_0) &= z_0,\end{aligned}$$

respectivamente, tal que $y(t), z(t) \in W \forall t \in [t_0, t_1]$. Suponiendo que $\|g(t, x)\| \leq \mu \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times W$ para algún $\mu > 0$ y $\|y_0 - z_0\| \leq \gamma$. Entonces

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} [e^{L(t-t_0)} - 1] \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

.

Teorema 13 (Continuidad en condiciones iniciales y parámetros): Sea $f(t, x, \lambda)$ continua en sus argumentos y localmente Lipschitz en x (uniformemente en t y λ) en $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y conexo. Sea $y(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Supongamos que $y(t, \lambda_0)$ está definida y permanece en D para todo $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|y_0 - z_0\| < \delta \quad \text{y} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta;$$

la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una solución única $z(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $z(t_0, \lambda) = z_0$, y satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

◆

D.3. Estabilidad de Lyapunov y convergencia

Definición 24 (Sistema). Un sistema dinámico no lineal puede usualmente ser representado por un conjunto de ecuaciones no lineales como

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{D.5}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en x y continua a trozos en t . La variable t puede ser o no explícita en f dando origen a las definiciones de *sistema autónomo* si t no es explícito y *sistema no autónomo* si t es explícito. El número de estados n se le llama *orden* del sistema. ♣

Definición 25 (Punto de equilibrio). Para un sistema, representado por (D.5), un punto de equilibrio x_e , donde

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

se llama *punto de equilibrio* del sistema. ♣

Observe que si el sistema es lineal e invariante en el tiempo $f(x) = Ax$, entonces existirá solo un estado de equilibrio si la matriz del sistema A es no singular, y un número infinito de estados de equilibrio si la matriz del sistema es singular. En el caso de los sistemas no lineales, pueden existir uno o más estados de equilibrio.

Cualquier punto de equilibrio puede ser desplazado al origen del espacio de estados mediante una traslación de coordenadas; suponga que $\dot{x} = f(t, x)$ tiene un punto de equilibrio en δ , entonces podemos proponer el cambio de variables $z = x - \delta$ y el sistema resultante $\dot{z} = f(t, z + \delta)$ tiene un punto de equilibrio en el origen $z = 0$; por esta razón no se hace pérdida de generalidad estudiar la estabilidad del sistema en el origen.

D.3.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Consideremos a $x(t; x_0, t_0)$ como la solución del sistema (D.5) cuya condición inicial es $(t_0 \geq 0, x_0)$ con $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Sean $B_c(x_e; \delta) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - x_e\| < \delta\}$ una bola abierta de condiciones iniciales y $B_s(x_e; \epsilon) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \|x(t; x_0, t_0) - x(t; x_e, t_0)\| < \epsilon \forall t \geq t_0\}$ una bola abierta de soluciones de (D.5). La solución $x(t; x_0, t_0)$ de (D.5) es:

- Acotada, si existe una constante $a(x_0, t_0) > 0$ tal que $\|x(t; x_0, t_0)\| < a(x_0, t_0)$, $\forall t \geq t_0$.
- Estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que si $x_0 \in B_c(x_e; \delta) \Rightarrow x(t; x_0, t_0) \in B_s(x_e; \epsilon)$, $\forall t \geq t_0$.
- Uniformemente estable, si es estable y δ no depende de t_0 .
- Asintóticamente estable (AE), si es estable y $x(t; x_0, t_0) \rightarrow x_e$ cuando $t \rightarrow \infty$, $\forall (x_0, t_0) \in B_c(x_e; \delta)$.
- Globalmente asintóticamente estable (GAE), si es AE $\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.
- Inestable, si no es estable.

D.3.2. Funciones de comparación

Definición 26 (Función de clase $\mathcal{K}$). Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ pertenece a la clase $\mathcal{K}$ si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$. ♣

Definición 27 (Función de Clase $\mathcal{KL}$). . Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ pertenece a la clase $\mathcal{KL}$ si, para cada s fijo, el mapeo $\beta(r, s)$ es clase $\mathcal{K}$ con respecto a r , y, para cada r fijo, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. ♣

Lema 6 (Propiedades de funciones clase $\mathcal{K}$ y $\mathcal{KL}$): Sean $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ funciones de clase $\mathcal{K}$ en $[0, a]$. Sean $\alpha_3(\cdot)$ y $\alpha_4(\cdot)$ funciones de clase $\mathcal{K}_\infty$ y sea $\beta(\cdot, \cdot)$ una función de clase $\mathcal{KL}$. Sea $\alpha_i^{-1}(\cdot)$ la inversa de $\alpha_i(\cdot)$, entonces:

1. α_1^{-1} está definida en $[0, \alpha_1(a))$ y es de clase $\mathcal{K}$.
2. α_3^{-1} está definida en $[0, \infty)$ y es de clase $\mathcal{K}_\infty$.
3. $\alpha_1 \circ \alpha_2$ es de clase $\mathcal{K}$.
4. $\alpha_3 \circ \alpha_4$ es de clase $\mathcal{K}_\infty$.
5. $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ es de clase $\mathcal{KL}$. ♠

Usando las funciones de comparación, es posible reescribir las definiciones de estabilidad en sentido de Lyapunov como se muestra a continuación.

D.3.3. Definiciones básicas empleando funciones de comparación

Definición 28. El punto de equilibrio $x = 0$ de (D.5) es:

- Uniformemente estable, si existe $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}$ y una constante $c > 0$, independiente de t_0 , tal que

$$\|x(t)\| \leq \gamma(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) : \|x(t_0)\| < c. \quad (\text{D.6})$$

- Uniformemente asintóticamente estable, si existe $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$ y una constante $c > 0$, independiente de t_0 , tal que

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall x(t_0) : \|x(t_0)\| < c. \quad (\text{D.7})$$

- Exponencialmente estable, si se satisface (D.7) con $\beta(r, s) = kre^{-\alpha s}$, $k > 0$, $\alpha > 0$.
- Globalmente uniformemente estable, si se satisface (D.6) con $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ para cualquier estado inicial $x(t_0)$.
- Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si se satisface (D.7) con $\beta \in \mathcal{KL}_\infty$ para cualquier estado inicial $x(t_0)$.
- Globalmente exponencialmente estable, si se satisface (D.7) para cualquier estado inicial $x(t_0)$ con $\beta(r, s) = kre^{-\alpha s}$, $k > 0$, $\alpha > 0$. ♣

El teorema principal de estabilidad de Lyapunov puede reescribirse como sigue.

Teorema 14: Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (D.5) y $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Sea $V : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función continuamente diferenciable tal que $\forall t \geq 0, \forall x \in D$,

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|), \quad (\text{D.8a})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|), \quad (\text{D.8b})$$

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es:

- Uniformemente estable, si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ en $[0, r)$ y $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ en $[0, r)$.
- Uniformemente asintóticamente estable, si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{K}$ en $[0, r)$.
- Exponencialmente estable, si $\gamma_i(\rho) = k_i \rho^\alpha$ en $[0, r)$, $k_i > 0$, $\alpha > 0$, $i = \overline{1, 3}$.
- Globalmente uniformemente estable, si $D = \mathbb{R}^n$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ y $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ en $\mathbb{R}_+$.
- Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si $D = \mathbb{R}^n$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ y $\gamma_3 \in \mathcal{K}$ en $\mathbb{R}_+$.
- Globalmente exponencialmente estable, si $D = \mathbb{R}^n$ y $\gamma_i(\rho) = k_i \rho^\alpha$ en $\mathbb{R}_+$, $k_i > 0$, $\alpha > 0$, $i = \overline{1, 3}$. ♦

D.4. Análisis de estabilidad de sistemas lineales

D.4.1. Criterio de Hurwitz

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (\text{D.9})$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz no singular; entonces el único estado de equilibrio es el origen $\mathbf{x} = 0$. Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del origen del espacio de estados es que la matriz $\mathbf{A}$ sea Hurwitz, es decir, que todos los valores propios de $\mathbf{A}$ tengan partes reales negativas, es decir:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0; \quad \Re(\lambda_i) < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (\text{D.10})$$

Teorema 15 (Routh-Hurwitz para sistemas de orden 3): *El polinomio*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

de coeficientes reales, es asintóticamente estable sí, los números a_i $i = \overline{0,3}$ son positivos y se verifica la desigualdad:

$$a_1a_2 > a_0a_3.$$

♦

Teorema 16 (Routh-Hurwitz para sistemas de orden n): *Sea*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

un polinomio arbitrario de grado n con coeficientes reales. Consideremos la matriz Q de orden n que definimos como:

$$Q := \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Resulta entonces que el polinomio (16) es asintóticamente estable sí todos los menores principales de Q son positivos [44].

♦

D.4.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

Considerando del sistema lineal e invariante en el tiempo (D.9) y eligiendo como función candidata de Lyapunov a

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{P}$ es una matriz hermítica definida positiva. La derivada en el tiempo de $V(\mathbf{x})$ a lo largo de cualquier trayectoria es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}.$$

Dado que $V(\mathbf{x})$ se eligió para ser definida positiva, se requiere, para la estabilidad asintótica, que $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea definida negativa. Por tanto, se requiere que:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x},$$

donde $\mathbf{Q}$ sea definida positiva:

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A},$$

por lo tanto, para la estabilidad asintótica del sistema de la ecuación (D.5), es suficiente que $\mathbf{Q}$ sea definida positiva.

Para probar que una matriz de $n \times n$ es definida positiva, se aplica el *criterio de Sylvester*, que dice que una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea definida positiva es que los determinantes de todos los menores principales de la matriz sean positivos.

Teorema 17: *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal e invariante en el tiempo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sea estrictamente estable, es que para cualquier matriz simétrica definida positiva $\mathbf{Q}$, la única matriz solución $\mathbf{P}$ de la ecuación de Lyapunov $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ sea simétrica definida positiva.*

♦

D.5. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales

D.5.1. Primer método de Lyapunov

El primer método de Lyapunov está restringido al análisis de la estabilidad local de un sistema no lineal. Ya que todos los sistemas físicos son esencialmente no lineales, el método de linealización de Lyapunov es un fundamento aceptable para la justificación del uso de técnicas de control lineal ya que se garantiza la estabilidad local del sistema físico no lineal original alrededor del punto de equilibrio.

Considerando el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{D.11})$$

donde $f(x)$ es continuamente diferenciable, el sistema dinámico (D.11) puede representarse por expansión en serie de Taylor como:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + f_s(x) = Ax + f_s(x), \quad (\text{D.12})$$

donde $f_s(x)$ son los términos de orden superior de la serie de Taylor. El primer término de la serie de Taylor no aparece pues es el punto de equilibrio. De esta manera podemos representar al sistema por la matriz jacobiana A de f con respecto al vector de estados x en el punto $x = 0$. Finalmente se puede escribir una aproximación al sistema no lineal como

$$\dot{x} = Ax, \quad (\text{D.13})$$

que es conocida como *linealización, aproximación lineal o ecuación en primera aproximación* del sistema no lineal (D.11) en el punto de equilibrio $x = 0$.

Teorema 18 (A. M. Lyapunov.): *Suponga que la solución trivial de la ecuación lineal (D.13) es asintóticamente estable; entonces la solución trivial de la ecuación no lineal (D.11) también es asintóticamente estable. Si la solución trivial de la ecuación lineal (D.13) es inestable; entonces la solución trivial de la ecuación no lineal (D.11) también es inestable. Si la solución trivial de la ecuación lineal (D.13) es estable; no se puede concluir sobre la estabilidad de la solución trivial de la ecuación no lineal (D.11).* ♦

DEMOSTRACIÓN La demostración de se puede consultar en [45]. ■

De manera similar, el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f(0, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p,$$

puede ser escrito como:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0} x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} u + f_s(x, u) = Ax + Bu + f_s(x, u). \quad (\text{D.14})$$

obteniendo la expresión linealizada $\dot{x} = Ax + Bu$, donde A es el Jacobiano de f respecto a x y B es el Jacobiano de f respecto a u , ambos evaluados en el origen $x = 0$, $u = 0$. Si se elige una función de control por retroalimentación de estados como $u = Kx$, entonces la ecuación (D.14) se reduce a $\dot{x} = (A + BK)x$ que puede expresarse como (D.13); con esto último, el sistema se analiza aplicando los teoremas 17 y 18.

D.5.2. Segundo método de Lyapunov

De la teoría de la mecánica clásica, se sabe que un sistema vibratorio es asintóticamente estable si su energía total se reduce continuamente en el tiempo hasta alcanzar un estado de equilibrio. El segundo método de Lyapunov se basa en una generalización de lo anterior: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, entonces la energía almacenada en él, desplazada dentro del dominio de atracción, decrece al aumentar el tiempo, hasta que por último adopta su valor mínimo en el estado de equilibrio. Sin embargo, para sistemas puramente matemáticos, no existe una forma simple de definir una “función de energía”. Para vencer esta dificultad, Lyapunov introdujo la función de Lyapunov, una función ficticia de energía. Esta idea es más general y más utilizada que la de la energía.

Antes de que se analice más profundamente la función de Lyapunov, son necesarias algunas definiciones.

Definición 29 (Función escalar definida positiva y definida negativa). Se dice que una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida positiva* en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estado) si $V(\mathbf{x}) > 0$ para todos los estados $\mathbf{x} \neq 0$ de la región Ω y $V(0) = 0$.

Sea una función variante en el tiempo $V(\mathbf{x}, t)$, una función definida positiva invariante en el tiempo $\tilde{V}(\mathbf{x})$ tales que cumplen las desigualdades:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, t) &> \tilde{V}(\mathbf{x}), \quad \forall t \geq t_0, \\ V(0, t) &> 0, \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

entonces $V(\mathbf{x}, t)$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) y está limitada por debajo por la función definida positiva invariante en el tiempo $\tilde{V}(\mathbf{x})$. Por otro lado, una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *definida negativa* si $-V(\mathbf{x})$ es definida positiva. ♣

Definición 30 (Función escalar semidefinida positiva y semidefinida negativa). Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida positiva* si es definida positiva en la región Ω excepto en el origen donde es cero, es decir, $V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall t \geq t_0$. Por otro lado, una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *semidefinida negativa* si $-V(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva. ♣

Definición 31 (Indefinición de funciones escalares). Una función escalar $V(\mathbf{x})$ es *indefinida* si en la región Ω adopta tanto valores positivos como negativos, independientemente de lo pequeña que sea la región Ω . ♣

Definición 32 (Funciones de Lyapunov). La función de Lyapunov es una función escalar definida positiva y es continua junto con sus primeras derivadas parciales respecto a sus argumentos en la región Ω alrededor del origen y tiene una derivada con respecto al tiempo que, cuando se toma a lo largo de la trayectoria, es definida negativa (o semidefinida negativa). Las funciones de Lyapunov involucran al vector de estados $\mathbf{x}$ y, posiblemente, al tiempo. Se expresa como $V(\mathbf{x}; t)$ lo cual indica que t es un argumento no necesariamente explícito. ♣

Observe que $\dot{V}(\mathbf{x}; t)$ es la derivada temporal de $V(\mathbf{x}; t)$ respecto a t a lo largo de una solución del sistema. Por tanto, $\dot{V}(\mathbf{x}; t) < 0$ implica que $V(\mathbf{x}; t)$ va decreciendo en función de t . Una función de Lyapunov no es única para un sistema dado. Por esta razón, el segundo método de Lyapunov es una herramienta más poderosa que las consideraciones convencionales de energía. Observe que para un sistema cuya energía se reduce en promedio, no necesariamente es estable en cada instante, entonces la energía en esos casos no es una función de Lyapunov.

Teorema 19 (Lyapunov): Sea el origen $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}, \\ \dot{V}(x) &\leq 0, \quad \forall x \in D, \end{aligned} \tag{D.15}$$

entonces $x = 0$ es estable. Mas aún, si

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}, \tag{D.16}$$

entonces $x = 0$ es AE. ♦

Teorema 20 (Barbashin-Krasovskii): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \tag{D.17a}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \tag{D.17b}$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \tag{D.17c}$$

entonces $x = 0$ es GAE. ♦

Definición 33 (Conjunto invariante). G es un *conjunto invariante* para un sistema dinámico si cada trayectoria del sistema que inicia en un punto en G permanece en G para todo tiempo futuro; es decir:

$$x(0) \in G \Rightarrow x(t) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para el caso:

$$x(0) \in G \Rightarrow x(t) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

entonces G es un *conjunto invariante positivo*. ♣

Teorema 21 (Conjunto invariante local): Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con f continua y sea $V(x)$ una función escalar con primera derivada parcial continua. Asumiendo que:

- Para alguna $l > 0$, la región Ω_l definida por $V(x) < l$ está acotada.
- $\dot{V} \leq 0 \quad \forall x \in \Omega_l$.

Sea R el conjunto de todos los puntos de Ω_l donde $\dot{V}(x) = 0$, y M el mayor conjunto invariante en R . Entonces, cada solución $x(t)$ originada en Ω_l tiende a M como $t \rightarrow \infty$. ♦

Teorema 22 (Conjunto invariante global): Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con f continua y sea $V(x)$ una función escalar con primera derivada parcial continua. Asumiendo que:

- $V(s) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$.
- $\dot{V} \leq 0$ sobre todo el espacio de estados.

Sea R el conjunto de todos los puntos de Ω_l donde $\dot{V}(x) = 0$, y M el mayor conjunto invariante en R . Entonces, toda solución $x(t)$ converge asintóticamente a M como $t \rightarrow \infty$. ♦

En general, el objetivo en el diseño de un control es lograr convergencia a un conjunto. Para sistema que no dependen del tiempo la principal herramienta para el análisis de convergencia es el teorema de invarianza de LaSalle. Para sistemas que dependen del tiempo, es de gran utilidad el teorema LaSalle-Yoshizawa.

Teorema 23 (Invarianza de LaSalle): Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea $R = \{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$. Sea M el mayor conjunto invariante en R . Entonces:

$$\forall x(0) \in \Omega, \quad x(t) \rightarrow M, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

♦

Teorema 24 (LaSalle-Yoshizawa): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(t, x)$ y suponga que f es localmente Lipschitz en x uniformemente en t . Sea $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x\|) &\leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|), \\ \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ y W es una función continua semidefinida positiva. Entonces, toda solución de $\dot{x} = f(t, x)$ es globalmente uniformemente acotada y satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0.$$

Adicionalmente, si W es definida positiva, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

♦

Corolario 25 (Estabilidad asintótica): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen y es tal que $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in D$. Sea $R = \{x \in D | \dot{V}(x) = 0\}$ y supongamos que no hay otra solución más que la trivial $x(t) \equiv 0$ que pueda permanecer en R . Entonces el origen es AE.

★

Corolario 26 (Estabilidad asintótica global): Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continuamente diferenciable y radialmente no acotada tal que $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Sea $R = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ y suponga que no hay otra solución más que la trivial $x(t) \equiv 0$ que pueda permanecer en R . Entonces el origen es GAE.

★

D.5.3. Consideraciones prácticas

Para poder aplicar el criterio de estabilidad de Lyapunov, siempre se da por hecho que la función de Lyapunov está dada y es adecuada; sin embargo, en la práctica, es necesaria la determinación de ésta y, casi siempre, la buena elección de la función candidata de Lyapunov no es un proceso sistemático y por tanto resulta de la intuición y la experiencia del diseñador.

Un método para la construcción de la función candidata de Lyapunov es el propuesto por Krasovskii y se resume en el siguiente teorema [46].

Teorema 27 (Krasovskii): Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con el punto de equilibrio de interés en el origen. Sea $A(x)$ la matriz jacobiana del sistema; es decir

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Si la matriz $F = A + A^T$ es definida negativa en una vecindad Ω del origen, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Una función candidata de Lyapunov para el sistema es:

$$V(x) = f^T(x)f(x).$$

Si Ω es todo el espacio de estados y además $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable. $\blacklozenge$

Teorema 28 (Teorema de Krasovskii generalizado): Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con el punto de equilibrio de interés en el origen. Sea $A(x)$ la matriz jacobiana del sistema. Entonces, una condición suficiente para la estabilidad asintótica del origen es que existan dos matrices simétricas definidas positivas P y Q tales que $\forall x \neq 0$, la matriz

$$F(x) = A^T + PA + Q,$$

sea semidefinida negativa en alguna vecindad Ω del origen. Una función candidata de Lyapunov para el sistema es:

$$V(x) = f^T(x)Pf(x).$$

Si la región Ω es todo el espacio de estados y además $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable. $\blacklozenge$

Teorema 29: Considere el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ con f continua y sea $V(x)$ una función escalar con primera derivada parcial continua. Asumiendo que en una vecindad Ω del origen:

- $V(x)$ es localmente definida positiva,
- $\dot{V}(x)$ es semidefinida positiva,
- el conjunto R definido por $\dot{V}(x) = 0$ no contiene trayectorias solución de $\dot{x} = f(x)$ mas que la trayectoria trivial $x \equiv 0$,

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable. Más aún, el mayor conjunto invariante Ω_l es un dominio de atracción del punto de equilibrio. $\blacklozenge$

D.6. Método de Lyapunov para el diseño de controladores adaptativos

Como la función de Lyapunov es similar a una función de energía, ésta debe decrecer con el tiempo. Utilizando este método en el diseño de sistemas adaptativos, se trasladan las especificaciones de estabilidad directamente en la ley de adaptación como se describe en los siguientes pasos:

1. El primer paso es encontrar la *ecuación de error* entre las señales, bien en la salida ($y - y_m$) o en las variables de estados ($x - x_m$).
2. Encontrar una función de Lyapunov como una función del error entre las señales y del error en los parámetros ($\phi = \hat{\theta} - \theta$). En su forma más simple esta función toma la forma:

$$V = e^T P e + \phi^T \Gamma^{-1} \phi,$$

donde las matrices P y Γ^{-1} deben ser definidas positivas.

3. Calcular la derivada de la función de Lyapunov. La derivada debe ser definida negativa; generalmente toma la forma

$$\dot{V} = -e^T Q e + f(\phi),$$

donde $f(\phi)$ son algunos términos incluyendo ϕ . El primer término garantiza que la derivada es definida negativa, por lo que haciendo el resto igual a cero se tiene una posible solución. La matriz Q es definida positiva. Las matrices Q y P , para un sistema gobernado por una matriz A , están relacionadas por la ecuación de Lyapunov:

$$-Q = A^T P + P A.$$

4. Haciendo el término extra igual a cero se obtiene la ley de adaptación. Normalmente tiene la forma:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \epsilon \xi,$$

donde ϵ está directamente relacionado con el error e y ξ es una versión modificada del vector de señales (referencias, salidas, etc.).

D.7. Misceláneos

Definición 34. Una función de transferencia $G(s)$ con coeficientes reales es *positiva real (PR)* (denotado como $G(s) \in \{PR\}$ si $\text{Re } G(s) \geq 0$ para $\text{Re } s > 0$). Una función de transferencia $G(s)$ es *estrictamente positiva real (SPR)* (denotado como $G(s) \in \{SPR\}$ si $G(s - \epsilon)$ es positiva real para ciertos $\epsilon > 0$). ♣

Lema 7 (Kalman - Yakubovich): Consideremos al sistema completamente controlable, completamente observable, lineal e invariante en el tiempo (D.18a) y a su representación por función de transferencia (D.18b).

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (\text{D.18a})$$

$$G(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B. \quad (\text{D.18b})$$

La función de transferencia (D.18b) es estrictamente positiva real (SPR) $G(s) \in \{SPR\}$ si y solo si existen matrices P y Q definidas positivas tales que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones (D.19).

$$A^T P + P A = -Q, \quad B^T P = C. \quad (\text{D.19})$$

Teorema 30 (Condiciones equivalentes para funciones positivas reales): Una función racional G es positiva real si y solo si se satisfacen todas las siguientes condiciones:

1. $G(s)$ es real para s real.
2. El polinomio del denominador de G es estable o puede tener ceros en el eje $i\omega$. ♦

Definición 35 (Sistema en tiempo real). Es aquel sistema discreto que interactúa activamente con un entorno y que satisface al menos una restricción temporal (D.20a) y una restricción de fase (retardo máximo) (D.20b).

$$\tau_c \leq T_s, \quad (\text{D.20a})$$

$$\xi \leq \frac{1}{\tau}, \quad (\text{D.20b})$$

donde τ_c es el tiempo de cálculo, T_s es un periodo de muestreo adecuado (criterio de Nyquist), ξ es la fase del sistema y τ es el tiempo de retención del entorno. ♣

D.7.1. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Considere un sistema descrito por las ecuaciones lineales variantes con el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t),\end{aligned}\tag{D.21}$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se dice que (D.21) es *controlable* si, dados dos puntos cualquiera x_0, x_1 existe un tiempo finito T y un control admisible $u(t)$ definido en $[0, T]$ tal que para $x(0) = x_0$ tengamos $x(T) = x_1$.

Sea $\Phi(t, t_0)$ la *matriz de transición* para el sistema libre $\dot{x} = A(t)x$ tal que

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

Note que $\Phi(t_0, t) = \Phi^{-1}(t, t_0)$. En el caso cuando A y B son independiente del tiempo $\Phi(t, t_0)$ es la matriz exponencial:

$$e^{A(t-t_0)} = \mathbb{I} + (t-t_0)A + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2 + \dots$$

Teorema 31: El sistema (D.21) es controlable sí la matriz simétrica

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt,$$

es definida positiva para algunos $t_1 > t_0$. ♦

Teorema 32: El sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ (o la pareja (A, B)) es controlable sí

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

.

Observabilidad significa que el estado inicial de un sistema puede ser determinado desde la medición adecuada de las salidas $y(t)$. Mas precisamente, el sistema (D.21) se dice que es *observable* si para cualquier estado $x(t_0) = x_0$ y dado cualquier control $u(t)$, el conocimiento de $y(t)$ en $t_0 \leq t \leq t_1$ es suficiente para determinar x_0 .

Definición 36 (Sistema dual). El sistema

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= -A^T(t)\tilde{x}(t) + C^T(t)\tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) &= B^T(t)\tilde{x}(t),\end{aligned}$$

donde $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^l$, es llamado el *sistema dual* de (D.21). ♣

Teorema 33: El sistema (D.21) es observable sí su sistema dual es controlable. ♦

Teorema 34: La pareja (A, C) es observable sí la pareja (A^T, C^T) es controlable, es decir:

$$\text{rank}[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

.

D.7.2. Control cuadrático lineal (LQR)

Ocasionalmente, es suficiente una aproximación lineal de un sistema no lineal; o por algún método (como linealización exacta) se puede llegar a un modelo lineal y en tal caso, se puede proponer un controlador lineal.

Para sistemas lineales en la forma $\dot{x} = Ax + Bu$, se puede proponer el controlador lineal $u = Kx$ donde se elige la matriz K tal que la matriz $A + BK$ sea Hurwitz, sin embargo, no se hace explícito el compromiso que existe entre las especificaciones dinámicas y el esfuerzo de control para poder cumplirlas. Una solución es diseñar u tal que minimice una función de costo.

El regulador cuadrático lineal (LQR) emplea como función de costo:

$$J(u) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt, \quad (\text{D.22})$$

donde Q y P son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones adecuadas. La función $u(t)$ que minimiza el funcional (D.22) es de la forma:

$$u^* = K_c x, \quad (\text{D.23})$$

donde $K_c = -R^{-1}B^T P$ y P es una matriz simétrica definida positiva y es la solución de la ecuación algebraica de Ricatti:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (\text{D.24})$$

Para detalles precisos sobre este tema, el lector puede consultar [47], el capítulo once “Optimal Control” de [48], el capítulo cinco “Optimal Control” de [49] o la mayoría de los libros de control lineal.

D.7.3. El observador de estados

Para sistemas lineales, el observador de estados puede ser representado como un sistema dinámico lineal que toma las entradas y las salidas del sistema para *observar* y producir una *estimación* de los estados del sistema. Considerado que el sistema real puede ser modelado por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (\text{D.25})$$

y que el observador es

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \quad (\text{D.26})$$

donde se ha agregado el término $L(y - C\hat{x})$ que es proporcional a la diferencia entre la salida medida y la salida predicha por el observador. Si se define el error $e = x - \hat{x}$, la dinámica $\dot{e}$ es:

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

Si la matriz L se elige de tal manera que la matriz $A - LC$ es Hurwitz, entonces $e(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$. La velocidad de convergencia es determinada por la elección que se haga de los eigenvalores de $A - LC$ a través de L .

Teorema 35 (Diseño del observador por asignación de eigenvalores): *Considere el sistema dado por (D.25) con una entrada y una salida. Sea $\lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ el polinomio característico de A . Si el sistema es observable, entonces (D.26) es un observador para el sistema, con L elegida como*

$$L = W_0^{-1} \tilde{W}_0 \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ p_n - a_n \end{bmatrix}, \quad (\text{D.27})$$

y las matrices W_0 y $\tilde{W}_0$ dadas por

$$W_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

entonces el error del observador $e = x - \hat{x}$ es gobernado por una ecuación diferencial con polinomio característico $p(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n$. $\blacklozenge$

El lector puede encontrar más detalles sobre este tema en el capítulo siete “Output feedback” de [27] y en la mayoría de los libros de control lineal moderno.

Bibliografía

- [1] K. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control around 1960*. IEEE Control Systems, June, 1996. pp. 44-49.
- [2] R. J. Salazar, W. F. Guerrero-Sánchez, J. F. Guerrero-Castellanos, and V. V. A. J. J. Oliveros Oliveros, “El control adaptativo y sus aplicaciones. un ejemplo de diseño e implementación para un motor dc,” *Congreso internacional de innovación tecnológica*, 2010.
- [3] Feedback Instrument Limited, Crowborough, UK, *Twin Rotor MIMO systems 33-220*, 2002.
- [4] Feedback Instrument Limited, Crowborough, UK, *Twin Rotor MIMO systems 33-220. Control experiments 33-949S*, 2006.
- [5] Q. Ahmed, “Robust control algorithms for twin rotor system,” Master’s thesis, Muhammad Ali Jinnah University, Islamabad, 2009.
- [6] T.-W. Lu and P. Wen, “Time optimal and robust control of twin rotor system,” *IEEE International conference on control and automation*, 2007.
- [7] S. Garrido, L. E. Moreno, and M. A. Salichs, “Nonlinear on-line identification of dynamic systems with restricted genetic optimization,” *6th European Congress on intelligent techniques and soft computing*, 1998.
- [8] S. Garrido, *Identificación, estimación y control de sistemas no lineales mediante RGO*. PhD thesis, Universidad Calor III de Madrid, Departamento de]Ingeniería de Sistemas y Automática, 1999.
- [9] C.-L. Shih, M.-L. Chen, and J.-Y. Wang, “Mathematical model set-point stabilizing controller design of a twin rotor mimo system,” *Asian Journal of Control*, 2008.
- [10] M. H. Marhaban and T. S. Hong, “Anfis: Self-tuning fuzzy pd controller for twin rotor mimo system,” *IEEJ Transactions on electrical and electronic engineering*, 2010.
- [11] E. G. Ramírez, A. S. Poznyak, and R. Lozano, “Control adaptable utilizando redes neuronales artificiales polinomiales,” *Revista del centro de investigación. Universidad La Salle*, vol. 4, no. 15, pp. 17–37, 2000.
- [12] A. S. Poznyak, E. N. Sánchez, and W. Yu, *Dynamic Neural Networks for nonlinear control: identification, satate estimation and tracking*. World Scientific, 2001.
- [13] A. Rahideh and M. H. Shaheed, “Mathematical dynamic modelling of a twin-rotor multiple input-multiple output system,” *IMechE, Systems and Control Engineering*, vol. 221, pp. 89–101, 2007.
- [14] L. Ljung, *System identification: theory for the user*. Prentice Hall, 1999.

-
- [15] W. F. Guerrero-Sánchez, V. V. Alexandrov, and S. S. Lemark, "Application of tikhonov's theorem for automatic stabilization of controlled motion," *Topics of Functional analysis and Partial Differential Equations, Theory and Applications*, pp. 80–87, 2008.
- [16] P. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Academic Press, London, 1999.
- [17] I. V. Novozhilov, *Fractional Analysis Methods of Motion Decomposition*. Birkhäuser, 1997.
- [18] A. S. Poznyak, *Modelado matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos*. Pearson, 2005.
- [19] R. C. Aster, B. Borchers, and C. H. Thurber, *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier academic press, 2005.
- [20] F. A. A. Camacho and J. J. O. Oliveros, "Revisión de resultados sobre el método de regularización de tijonov," Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM, 2009.
- [21] L. Ljung, *System Identification Toolbox for use with Matlab*. User's guide MathWorks, Inc., 1995.
- [22] A. S. Poznyak, *Advanced mathematical tools for automatic control engineers*, vol. 1: Deterministic Techniques. Elsevier, 1a ed., 2008.
- [23] K. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2008. Reprint of book previously published by Addison-Wesley (1989).
- [24] F. R. R. and M. J. L. Sánchez, *Control adaptativo y robusto*. Universidad de Sevilla, 1996, Rev. 2005.
- [25] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, Inc., 2003.
- [26] K. J. Astrom, *Adaptive Control*. Addison-Wesley, 1989.
- [27] R. M. M. Karl Johan Astrom, *Feedback Systems. An introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2008.
- [28] W. F. Guerrero-Sánchez, J. F. Guerrero-Castellanos, R. Juárez-Salazar, and B. B. Salmerón-Quiroz, "Nonlinear observer for real-time attitude estimation," *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, pp. 78–83, 2009.
- [29] J. B. Kuipers, *Quaternions and rotations sequences. A primer with applications to orbits, aerospace and virtual reality*. Princeton University Press, 1999.
- [30] Feedback Instruments Limited, *Analogue Servo - Fundamentals Trainer 33-100*. User's Manual.
- [31] A. Rahideh and M. H. Shaheed, "Mathematical dynamic modelling of a twin-rotor multiple input-multiple output system," *Proc. IMechE Vol. 221 Part I, J. Systems and Control Engineering*, pp. pp. 89–101, 2007.
- [32] M. H. Rashid, *Electrónica de potencia. Circuitos, dispositivos y aplicaciones*. Prentice Hall, 3a. ed., 2002.
- [33] W. F. Guerrero-Sánchez and A. V. V. Alexandrov, *Algoritmos de estabilización para sistemas perturbados singularmente*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM, 2008.
- [34] R. C. José and A. W. F. Guerrero-Sánchez, "Métodos de aproximación para resolver problemas perturbados regular y singularmente," Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM, 2008.
- [35] S. K. R. and R. M. M, "Identificación de sistemas mediante rls," *Técnicas modernas en automática*, 2003.
-

-
- [36] A. Poznyak, "Least squares method for dynamic systems identification." Notas de curso, Departament for automatic control CINVESTAV-IPN, 2007.
 - [37] M. T. Kyu, Z. M. Aung, and Z. M. Naing, "Design and implementation of active filter for data acquisition system," *International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2009*, pp. 337–341, 2009.
 - [38] M. L. R. de Campos, "Butterworth filters," *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, vol. 2, pp. 657–661, 1999.
 - [39] R. L. Burden and J. D. Faires, *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
 - [40] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. Third Edition, 2002.
 - [41] R. Bishop, *The mechatronics Handbook*. Boca Raton, 2002.
 - [42] L. Bascetta, G. Magnani, and P. Rocco, "Velocity estimation: Assessing the performance of non-model-based techniques," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, pp. 424–433, 2009.
 - [43] J. H. Mathews and K. D. Fink, *Métodos numéricos con Matlab*. Prentice Hall, 2000.
 - [44] L. S. Pontriaguin, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Aguilar, primera edición ed., 1973.
 - [45] V. N. Afanas'ev, V. B. Kolmanovskii, and V. R. Nosov, *Mathematical Theory of Control Systems Design*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
 - [46] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1a ed., 1991.
 - [47] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall International, Inc., 1989.
 - [48] P. N. Paraskevopoulos, *Modern Control Engineering*. Marcel Dekker, Inc., 2002.
 - [49] C. Heij, A. Ran, and F. van Schagen, *Introduction to Mathematical Systems Theory: Linear Systems, Identification and Control*. Birkhäuser Verlag, 2007.
-