2

Líneas en coordenadas homogéneas

Rigoberto Juárez Salazar

Última actualización: **27 de enero de 2019.**

http://rjuarezs.com

El contenido de este documento está basado en el artículo *Operator-based homogeneous coordinates: application in camera document scanning.*[1] Este material puede ser usado libremente haciendo referencia a la publicación original. Esperamos que las ideas analizadas aquí resulten útiles al lector.

[1] Rigoberto Juarez-Salazar and Victor H. Diaz-Ramirez. Operator-based homogeneous coordinates: application in camera document scanning. *Optical Engineering*, 56(7):070801, 2017

2.1 Definición de líneas

Una línea en el plano xy se puede representar mediante la ecuación

$$y = mx + b. \tag{2.1}$$

Esta ecuación se puede reescribir como $mx + b - y = 0$ o, en general, como

$$l_x x + l_y y + l_z = 0, \tag{2.2}$$

donde l_x, l_y, y l_z son constantes. Más aún, usando las coordenadas homogéneas de los puntos (x, y), una línea recta se puede representar mediante la ecuación

Ecuación de la recta usando coordenadas homogéneas.

$$\boldsymbol{l}^T \mathcal{H}[\boldsymbol{x}] = 0, \tag{2.3}$$

donde $\boldsymbol{x} = [x, y]^T$, y

$$\boldsymbol{l} = [l_x, l_y, l_z]^T \tag{2.4}$$

es el vector de la línea.

De la ecuación (2.4) se puede realizar las siguientes dos observaciones:

1. El vector $\boldsymbol{l}$ no es único. Observe que si multiplicamos la ecuación (2.3) por cualquier valor diferente de cero, por ejemplo 2 o $-0{,}01$,

la igualdad se mantiene. Por lo tanto, los vectores $\boldsymbol{l}$, $2\boldsymbol{l}$, o $-0{,}01\boldsymbol{l}$ representan la misma línea recta.

2. Los vectores $\boldsymbol{l}$ y $\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ son ortogonales. Esta propiedad nos permite calcular el vector $\boldsymbol{l}$ a partir de dos puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ de la recta. Como se requiere que $\boldsymbol{l}$ sea ortogonal tanto a $\boldsymbol{x}_1$ como a $\boldsymbol{x}_2$, entonces solo debemos usar el producto vectorial

$$\boldsymbol{l} = \mathcal{H}[\boldsymbol{x}_1] \times \mathcal{H}[\boldsymbol{x}_2]. \tag{2.5}$$

Por definición, si el producto interno $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ es igual a cero, entonces los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares uno del otro; i.e., $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales.

3. Dos líneas diferentes siempre intersectan en un único punto. Considere dos líneas rectas diferentes cualesquiera con vectores $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$. Si $\boldsymbol{x}_0$ es el punto de intersección de las líneas, entonces $\boldsymbol{x}_0$ es un punto tanto de la línea $\boldsymbol{l}_1$ como de la línea $\boldsymbol{l}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{H}[\boldsymbol{x}_0]$ debe ser ortogonal tanto a $\boldsymbol{l}_1$ como a $\boldsymbol{l}_2$. Esto nos permite calcular el punto de intersección $\boldsymbol{x}_0$ como

$$\boldsymbol{x}_0 = \mathcal{H}^{-1}[\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2]. \tag{2.6}$$

La propiedad de ortogonalidad entre $\boldsymbol{l}$ y $\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ nos permite obtener la siguiente interpretación geométrica. Anteriormente hemos visto que si $\boldsymbol{x}$ es un punto en el plano, entonces $\lambda\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ corresponde a una línea recta que pasa por el origen. Entonces, dado que $\boldsymbol{l}$ es un vector ortogonal a las "líneas" $\lambda\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$, entonces la ecuación (2.4) se puede interpretar como la ecuación del plano que pasa por el origen y tiene normal $\boldsymbol{l}$.

Una recta en coordenadas cartesianas se puede interpretar geométricamente como un plano en coordenadas homogéneas.

La interpretación geométrica de puntos y líneas en coordenadas homogéneas se puede visualizar a través de la analogía dada en la Tabla 2.1.

Cuadro 2.1: Interpretación geométrica de puntos y líneas en coordenadas homogéneas.

Puntos	Líneas
Un punto $\boldsymbol{x}$ está representado como una "línea" $\lambda\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ en el espacio de las coordenadas homogéneas.	Una línea recta $\boldsymbol{l}$ se representa como un "plano" $\boldsymbol{l}^T\mathcal{H}[\boldsymbol{x}] = 0$ en el espacio de las coordenadas homogéneas.
La intersección entre la "línea" $\lambda\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ y el plano $z = s$ está relacionado con el punto representado por $\boldsymbol{x}$ en coordenadas cartesianas.	La intersección entre el "plano" $\boldsymbol{l}^T\mathcal{H}[\boldsymbol{x}] = 0$ y el plano $z = s$ está relacionado con la recta representada por $\boldsymbol{l}$ en coordenadas cartesianas.

2.2 *Líneas paralelas y puntos ideales*

Entre dos rectas diferentes cualesquiera siempre hay un único punto de intersección. Incluso dos líneas paralelas tienen un punto de intersección: un punto ideal (o punto al infinito).

¿Cuál es el punto de intersección de dos líneas paralelas? Considere una línea recta con vector $\boldsymbol{l} = [l_1, l_2, l_3]^T$. Si $\bar{\boldsymbol{l}}$ es el vector de una línea paralela a $\boldsymbol{l}$, entonces $\bar{\boldsymbol{l}}$ se puede escribir como

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \lambda \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 + \delta \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

donde λ y δ son escalares diferentes de cero. Podemos definir los *puntos ideales* (o puntos al infinito) como la intersección de líneas paralelas. Por ejemplo, el punto de intersección entre las líneas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\bar{\boldsymbol{l}}$ es

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{l} \times \bar{\boldsymbol{l}}, \tag{2.8}$$

donde

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

son las coordenadas homogéneas de un punto ideal.

Los puntos ideales tienen coordenadas homogéneas $\boldsymbol{\psi}$ con escala igual a cero; i.e., $\mathcal{S}[\boldsymbol{\psi}] = 0$.

Podemos concluir que $\boldsymbol{\psi}$ es un punto ideal mediante el siguiente razonamiento. Considere al punto (a, b) en el plano cartesiano. Cualquier punto sobre la linea que pasa por el origen y (a, b) se puede obtener como

$$\boldsymbol{p} = (\xi a, \xi b), \tag{2.10}$$

donde ξ es un número real. De la Ec. (2.10) se puede observar que el punto $\boldsymbol{p}$ está más alejado del origen en la medida de que $\xi \to \infty$. Así, un punto al infinito corresponde al límite $\xi = \infty$. Las coordenadas homogéneas de $\boldsymbol{p}$ son

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{p}] = \begin{bmatrix} \xi a \\ \xi b \\ 1 \end{bmatrix} = \xi \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1/\xi \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Recordemos que las coordenadas homogéneas de un punto son invariantes a la multiplicación por un escalar, ver la Eq. (1.11). Por lo tanto, la Ec. (2.11) se puede escribir simplemente como

Ecuación (1.11):

$$\mathcal{H}_s^{-1}[\lambda \boldsymbol{y}] = \mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}], \quad \lambda \neq 0.$$

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{p}] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1/\xi \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

La Ec. (2.11) nos permite concluir que un punto en el infinito $\xi = \infty$ tendrá coordenadas homogéneas con escala igual a cero como en la Ec. (2.9). Así, cualquier punto que en coordenadas homogéneas tiene escala igual a cero representa un punto ideal.

Se puede mostrar que el conjunto de todos los puntos ideales en el plano son colineales; es decir, forman una línea recta conocida como *línea al infinito*. Más aún, el vector de la línea al infinito es

Todos los puntos ideales forman una línea recta. Esta recta es conocida como la *línea al infinito* y se representa mediante el vector $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$.

$$l_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Esto es fácil de comprobar usando la Ec. (2.3) y verificar que la igualdad se satisface:

$$l_\infty^T \psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{2.14}$$

Ecuación (2.3) (ecuación de la recta):

$$l^T \mathcal{H}[x] = 0.$$