1

Coordenadas homogéneas: definición mediante representación de puntos

Rigoberto Juárez Salazar

Última actualización: **27 de enero de 2019.**

http://rjuarezs.com

El contenido de este documento está basado en el artículo *Operator-based homogeneous coordinates: application in camera document scanning.*[1] Este material puede ser usado libremente haciendo referencia a la publicación original. Esperamos que las ideas analizadas aquí resulten útiles al lector.

[1] Rigoberto Juarez-Salazar and Victor H. Diaz-Ramirez. Operator-based homogeneous coordinates: application in camera document scanning. *Optical Engineering*, 56(7):070801, 2017

1.1 Puntos en coordenadas cartesianas

Usando coordenadas cartesianas, un punto en el espacio se puede representar con un vector que inicia en el origen de un sistema coordenado y termina en la ubicación del punto que se desea representar. En la Fig. 1.1 vemos dos vectores que describen la posición de un punto en el espacio 1D y 2D, respectivamente.

La representación de puntos usando coordenadas cartesianas tiene las siguientes propiedades.

1. Los puntos en el espacio de n dimensiones están representados por un vector con n elementos. Por ejemplo, un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio unidimensional, bidimensional, tridimensional, etc., se representa como

$$\boldsymbol{x} = [x], \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{etc.} \tag{1.1}$$

2. Existe un único vector que representa a un punto en el espacio (de cualquier dimensión). En otras palabras, no hay dos vectores diferentes que representen al mismo punto.

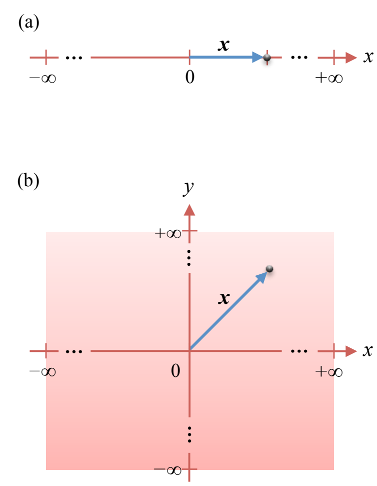

Figura 1.1: Coordenadas cartesianas de un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio de (a) una dimensión y (b) dos dimensiones.

A continuación veremos que las coordenadas homogéneas *agregan* un "grado de libertad" a las coordenadas cartesianas de un punto.

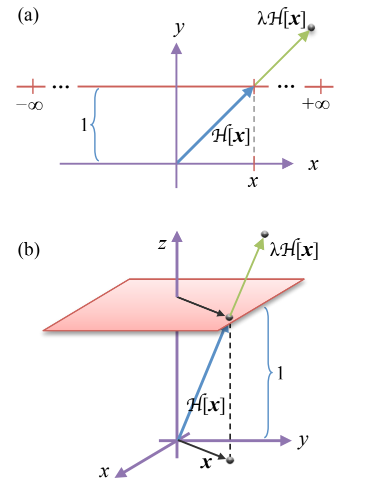

Figura 1.2: Coordenadas homogéneas $\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ de un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio de: (a) una dimensión, y (b) dos dimensiones.

1.2 *Puntos en coordenadas homogéneas*

1.2.1 *Los operadores $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, y $\mathcal{H}_s$*

Considere un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio n-dimensional. La posición de este punto puede describirse usando coordenadas cartesianas como

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

El punto $\boldsymbol{x}$ se puede representar desde un espacio $(n+1)$-dimensional mediante el vector

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Nos referimos al vector $\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ como las *coordenadas homogéneas de* $\boldsymbol{x}$, donde $\mathcal{H}$ genera un vector formado por el vector que recibe como argumento y una entrada adicional con valor igual a uno. En la Fig. 1.2 se muestran los mismos puntos que en la Fig. 1.1, pero usando coordenadas homogéneas.

Habrá ocasiones donde será necesario que el valor de la entrada adicional sea cero, en lugar de uno. Para esto, usaremos el operador $\mathcal{H}_0$ definido como

$$\mathcal{H}_0[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Observe que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ pueden considerarse dos casos particulares de un operador más general $\mathcal{H}_s$ definido como

$$\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ s \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

donde s puede ser cualquier número real.

En efecto, los operadores $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ son casos particulares de $\mathcal{H}_s$ porque se obtienen de este último usando $s = 1$ y $s = 0$, respectivamente.

1.2.2 *Los operadores inversos $\mathcal{H}_0^{-1}$ y $\mathcal{H}_s^{-1}$*

El proceso de generar vectores $(n+1)$-dimensionales a partir de vectores n-dimensionales usando el operador $\mathcal{H}_s$ (o sus casos particulares $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$), se puede revertir como sigue. Considere el vector

$(n+1)$-dimensional $\boldsymbol{y}$ dado como

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Entonces, definimos el operador H_0^{-1} como aquel que regresa el vector formado con las primeras n componentes del vector que recibe como argumento; es decir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathcal{H}_0^{-1}[\boldsymbol{y}]. \tag{1.7}$$

De forma similar, la última componente del vector $\boldsymbol{y}$, conocida como *escala*, se puede obtener como

$$y_{n+1} = \mathcal{S}[\boldsymbol{y}], \tag{1.8}$$

donde $\mathcal{S}$ es el *operado escala*. Así, cualquier vector $(n+1)$-dimensional se puede dividir en dos partes como

Nos referiremos a $\mathcal{S}$ como el *operador escala*. Este operador entrega como resultado la escala (última componente) del vector dado como argumento; es decir, $y_{n+1} = \mathcal{S}[\boldsymbol{y}]$.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}}\right\} \mathcal{H}_0^{-1}[\boldsymbol{y}] \\ \left.\vphantom{y_{n+1}}\right\} \mathcal{S}[\boldsymbol{y}] \end{matrix}. \tag{1.9}$$

Usando $\mathcal{H}_0^{-1}$ y $\mathcal{S}$, podemos definir la inversa del operador $\mathcal{H}_s$ como

$$\mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}] = \frac{s}{\mathcal{S}[\boldsymbol{y}]}\mathcal{H}_0^{-1}[\boldsymbol{y}]. \tag{1.10}$$

Observe que se obtiene el mismo resultado si el argumento de $\mathcal{H}_s^{-1}$ se multiplica por un escalar λ diferente de cero; es decir,

$$\mathcal{H}_s^{-1}[\lambda\boldsymbol{y}] = \mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}], \quad \lambda \neq 0. \tag{1.11}$$

Otras propiedades del operador $\mathcal{H}_s$ y su inversa son:

Estas propiedades son bastante útiles en manipulaciones algebraicas. Se sugiere al lector comprobar todas las igualdades en la Tabla 1 de la referencia 1.

$$\mathcal{H}_s^{-1}\left[\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}]\right] = \boldsymbol{x}, \tag{1.12}$$

$$\mathcal{H}_s\left[\mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}]\right] = \frac{s}{\mathcal{S}[\boldsymbol{y}]}\boldsymbol{y}, \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}] \longleftrightarrow \frac{\mathcal{S}[\boldsymbol{y}]}{s}\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{y}, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \Xi_s\mathcal{H}[\boldsymbol{x}], \tag{1.15}$$

$$\mathcal{H}_s^{-1}[\boldsymbol{y}] = \mathcal{H}^{-1}[\Xi_s^{-1}\boldsymbol{y}]. \tag{1.16}$$

donde

$$\Xi_s = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n^T & s \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Ξ_s es la matriz de transformación de base. $\mathcal{I}_n$ es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

1.2.3 *Un punto en coordenadas cartesianas es una línea recta en coordenadas homogéneas*

Las ecuaciones (1.10) y (1.11) permiten interpretar la acción del operador $\mathcal{H}_s^{-1}$ como la de hallar la intersección entre el hiperplano $y_{n+1} = s$ y la recta con dirección del vector $\boldsymbol{y}$ que pasa por el origen (ver la Fig. 1.2 para los casos 1D y 2D). En otras palabras, un punto en el espacio n-dimensional se representa como una línea en el espacio $(n+1)$-dimensional.

Usando coordenadas homogéneas, un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio n-dimensional es representado como una línea recta $\lambda\mathcal{H}[\boldsymbol{x}]$ en el espacio $(n+1)$-dimensional, ver Fig. 1.2.

En contraste al uso de coordenadas cartesianas, la representación de puntos usando coordenadas homogéneas tiene las siguientes propiedades.

1. Los puntos en el espacio de n dimensiones están representados por vectores con $n+1$ elementos. Por ejemplo, un punto $\boldsymbol{x}$ en el espacio unidimensional, bidimensional, tridimensional, etc., se representa como

$$\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}, \quad \text{etc.} \tag{1.18}$$

2. Existe un número infinito de vectores $\boldsymbol{y} = \lambda\mathcal{H}_s[\boldsymbol{x}]$, $\lambda \neq 0$, que representan al mismo punto $\boldsymbol{x}$. Ver la Ec. (1.11).

La no unicidad en la representación de puntos mediante coordenadas homogéneas podría parecer un problema serio. Sin embargo, veremos que esta característica permite realizar ciertas operaciones no lineales (en coordenadas cartesianas) como simples operaciones lineales (usando coordenadas homogéneas).

Hemos analizado la representación de puntos usando coordenadas cartesianas y coordenadas homogéneas. También hemos definido los operadores $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{S}$, H_0^{-1}, y $\mathcal{H}_s^{-1}$. Los conceptos principales analizados hasta ahora se pueden resumir como sigue.

- El operador $\mathcal{H}_s$ nos permite ir del espacio de las coordenadas cartesianas (n dimensiones) al espacio de coordenadas homogéneas ($n+1$ dimensiones).

- El operador H_s^{-1} nos permite regresar desde el espacio de coordenadas homogéneas al espacio de coordenadas cartesianas, ver la Fig.

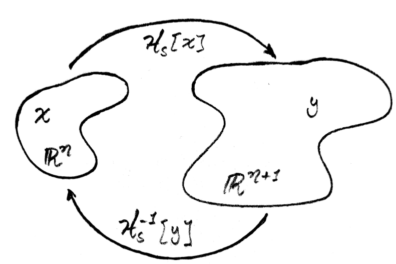

Figura 1.3: El operador $\mathcal{H}_s$ nos permite ir del espacio de las coordenadas cartesianas (n dimensiones) al espacio de coordenadas homogéneas ($n+1$ dimensiones). Por otro lado, el operador H_s^{-1} nos permite regresar desde el espacio de coordenadas homogéneas al espacio de coordenadas cartesianas.

1.3.

- Existe un único vector $\boldsymbol{x}$ que representa a un punto cuando se usan coordenadas cartesianas. Por el contrario, existen infinitos vectores que representan a un mismo punto cuando se usan coordenadas homogéneas (los puntos de una recta con dirección $\mathcal{H}[x]$ que pasa por el origen).

- Los puntos en el espacio de n dimensiones se representan como líneas rectas en el espacio de $n+1$ dimensiones cuando se usan coordenadas homogéneas.

En este capítulo hemos estudiado algunas propiedades de las coordenadas homogéneas para la representación de puntos en el espacio. En el siguiente capítulo se analizará el uso de las coordenadas homogéneas para la representación de líneas rectas.